
Notes de cours

Bases 2

Jérémi Dardé, Jérémy Heleine

L1 Parcours Spécial

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Dernière mise à jour : 29 mai 2026

Pour toute question ou remarque : jeremi.darde@math.univ-toulouse.fr,
jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Table des matières

Table des matières	i
1 Suites	1
1.1 Rappels	1
1.2 Notation de Landau	5
1.2.1 Suite négligeable	5
1.2.2 Suite dominée	8
1.2.3 Suite équivalente	11
1.3 Sous-suites, suites extraites	14
1.4 Suites de Cauchy	16
1.5 Solutions des exercices	20
2 Développements limités	23
2.1 Définitions, premières propriétés	23
2.2 Notation de Landau	30
2.3 Formules de Taylor	32
2.3.1 Fonctions n fois dérivables	32
2.3.2 Formules de Taylor	37
2.3.3 Développements limités des fonctions usuelles	41
2.4 Étude d'extrema	44
2.4.1 Point critique	44
2.4.2 Étude de points critiques	47
2.5 Indications pour les exercices	50
2.6 Solutions des exercices	51
3 Espaces vectoriels	58
3.1 $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	58
3.2 Sous-espace vectoriel	63
3.3 Famille de vecteurs	72
3.4 Espace vectoriel de dimension finie	80
3.5 Solutions des exercices	90

4	Applications linéaires	101
4.1	Application linéaire	101
4.2	Exemples d'applications linéaires	106
4.2.1	Quelques exemples pour commencer	106
4.2.2	Homothéties	107
4.2.3	Projecteurs	108
4.2.4	Symétries	112
4.3	Application linéaire en dimension finie	115
4.3.1	Applications coordonnées	115
4.3.2	Le théorème du rang	118
4.4	Solutions des exercices	123
5	Matrices	125
5.1	Définition	125
5.2	Structure d'espace vectoriel	127
5.3	Produit matriciel	129
5.4	Matrices carrées	133
5.4.1	Symétries	134
5.4.2	Trace	135
5.4.3	Matrices triangulaires	136
5.4.4	Puissances d'une matrice	137
5.4.5	Inverse d'une matrice	141
5.5	Application linéaire associée	144
5.6	Systèmes linéaires	147
5.7	Calcul de l'inverse	150
5.8	Rang d'une matrice	152
5.9	Solutions des exercices	158
6	Matrices et applications linéaires	163
6.1	Matrice d'une application linéaire	163
6.2	Image d'un vecteur	166
6.3	Opérations	167
6.4	Endomorphismes et puissances	169
6.5	Matrice d'un isomorphisme	170
6.6	Changement de base	171
6.7	Solutions des exercices	174
7	Déterminant	175
7.1	Applications n -linéaires	175
7.2	Déterminant d'une famille de vecteurs	180
7.2.1	Cas de la dimension 2	180
7.2.2	Cas de la dimension 3	182
7.2.3	La dimension 3 via la dimension 2	185
7.2.4	Cas de la dimension quelconque	188

7.2.5	Interprétation géométrique du déterminant	191
7.2.6	Quelques propriétés	192
7.3	Déterminant d'un endomorphisme	202
7.4	Déterminant d'une matrice	204
7.5	Comatrice	210
7.6	Calcul du déterminant d'une matrice en pratique	212
7.7	Application : méthode de Cramer	216
7.8	Solutions des exercices	218

Chapitre 1

Suites

1.1 Rappels

Définition 1.1.1. Une suite réelle est une fonction $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. De même, une suite complexe est une fonction $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes. Pour toute suite u , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n := u(n)$.

Dans ce cours, lorsque l'on parlera d'une suite sans préciser s'il s'agit d'une suite réelle ou complexe, il sera sous-entendu que la suite peut être à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1.1.2. Une suite u est dite convergente s'il existe ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$ si la suite est réelle, $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite est complexe) tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que ℓ est la limite de u et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. On dit que la suite u est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 1.1.3. Lorsque l'on sait que la limite d'une suite u existe, et seulement dans ce cas, on pourra également noter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Proposition 1.1.4. Soit u une suite. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On trouve alors $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |u_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc obtenu :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre $\ell_1 = \ell_2$. ■

Définition 1.1.5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est :

— majorée s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M;$$

— minorée s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq M.$$

Attention, la notion de suite majorée/minorée n'a de sens que pour les suites réelles. La définition suivante, en revanche, est bien valable également pour les suites complexes.

Définition 1.1.6. Soit u une suite. On dit que u est bornée s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Proposition 1.1.7. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit u une suite convergente. On note ℓ sa limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On considère $\varepsilon = 1$. On trouve alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq 1.$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

On note

$$M_1 := \max_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} |u_n|.$$

En notant $M := \max(M_1, 1 + |\ell|)$, on a ainsi obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M,$$

ce qui termine la preuve. ■

Remarque 1.1.8. La réciproque est fausse : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Considérons par exemple la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n.$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = |(-1)^n| = 1,$$

et la suite u est donc bornée. Montrons qu'elle ne converge pas, c'est-à-dire :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 / \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N / |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Soit donc $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $|u_N - \ell| > \frac{1}{2}$, alors $n = N$ convient. Sinon, $|u_N - \ell| \leq \frac{1}{2}$. Comme $|u_{N+1} - u_N| = 2$, on obtient :

$$|u_{N+1} - \ell| = |u_{N+1} - u_N + u_N - \ell| \geq |u_{N+1} - u_N| - |u_N - \ell| \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{1}{2},$$

et ainsi $n = N + 1$ convient.

Définition 1.1.9. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \geq M.$$

On dit que u tend vers $-\infty$ si :

$$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \leq M.$$

Si u tend vers $\pm\infty$, on pourra noter $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pm\infty$.

Définition 1.1.10. On dit qu'une suite u vérifie une propriété à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, u_n vérifie cette propriété.

Exemple 1.1.11. La suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - \frac{2}{n+1}$$

est positive à partir du rang 1 et strictement positive à partir du rang 2.

Exercice 1.1

[Solution page 20.](#)

Soit u une suite. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite u est bornée à partir d'un certain rang ;
- (ii) la suite u est bornée.

Définition 1.1.12. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est

— croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n;$$

— strictement croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n;$$

— décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n;$$

— strictement décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$

On dit que u est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Proposition 1.1.13. 1. Toute suite croissante (respectivement décroissante) à partir d'un certain rang tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
2. Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) à partir d'un certain rang converge.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas d'une suite croissante (le cas d'une suite décroissante se traite de manière similaire). Soit donc $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (dès le début pour simplifier, mais la preuve s'adapte au cas où la croissance n'est vraie qu'à partir d'un certain rang). Il y a deux cas possibles : soit u est majorée, soit elle ne l'est pas.

Cas 1 : u n'est pas majorée. Supposons que u ne soit pas majorée, c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / u_n > M.$$

Soit alors $M \in \mathbb{R}$. On trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$. Soit $n \geq N$. Comme u est croissante, on a alors :

$$u_n \geq u_N > M.$$

Ainsi, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Cas 2 : u est majorée. Si u est majorée, l'ensemble de ses termes admet une borne supérieure, notée L :

$$L := \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du supremum, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_N > L - \varepsilon.$$

Soit $n \geq N$. Comme u est croissante, on a alors :

$$u_n \geq u_N > L - \varepsilon.$$

Or, L est un majorant de u , donc $u_n \leq L$. Ainsi :

$$L - \varepsilon < u_n \leq L < L + \varepsilon,$$

ou encore :

$$|u_n - L| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$. ■

Exemple 1.1.14. Soit $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

On peut par exemple affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geq -15,$$

et ainsi la suite w est minorée. De plus :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = -\frac{(n-1)^2 - 2}{2^{n+1}}.$$

Ainsi w est décroissante à partir du rang 3. On en déduit qu'elle converge.

1.2 Notation de Landau

1.2.1 Suite négligeable

Définition 1.2.1. Soient u et v deux suites (réelles ou complexes). On dit que u est négligeable devant v (en $+\infty$), et on note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ (ou plus simplement $u_n = o(v_n)$), s'il existe une suite ε telle que :

1. $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$,
2. $u_n = \varepsilon_n v_n$ (à partir d'un certain rang).

Exemple 1.2.2. Soient les suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := n \quad \text{et} \quad v_n := n^2.$$

En posant $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$, on obtient :

$$u_n = n = \frac{1}{n} n^2 = \varepsilon_n v_n.$$

Comme $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a donc montré $u_n = o(v_n)$.

Proposition 1.2.3. Soient u et v deux suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad v_n \neq 0.$$

Alors :

$$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. Sens direct. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Alors il existe une suite ε convergeant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang. Ainsi, pour $n \geq N$ assez grand :

$$\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Réciproquement, supposons que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On définit la suite ε par :

$$\varepsilon_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n < N, \\ \frac{u_n}{v_n}, & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Alors $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, pour $n \geq N$, $u_n = \varepsilon_n v_n$. ■

Exemple 1.2.4. Reprenons l'exemple précédent avec $u_n = n$ et $v_n = n^2$. Comme v_n ne s'annule pas à partir du rang 1, on peut écrire :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et en déduire que $u_n = o(v_n)$. Plus généralement, $n^k = o(n^p)$ si et seulement si $k < p$. En effet, pour $n \geq 1$:

$$\frac{n^k}{n^p} = n^{k-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0, & \text{si } k < p, \\ 1, & \text{si } k = p, \\ +\infty, & \text{si } k > p. \end{cases}$$

Remarque 1.2.5. On a $n = o(n^2)$ et $n^{-2} = o(n^{-1})$.

Proposition 1.2.6. Soient u et v deux suites. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff |u_n| = o(|v_n|).$$

Démonstration. Sens direct. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Alors il existe une suite ε convergeant vers 0 et telle que

$$u_n = \varepsilon_n v_n$$

à partir d'un certain rang. Pour n assez grand, on a donc :

$$|u_n| = |\varepsilon_n| |v_n|,$$

avec $|\varepsilon_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $|u_n| = o(|v_n|)$.

Réciproquement, supposons que $|u_n| = o(|v_n|)$. On trouve alors une suite ε convergeant vers 0 et telle que

$$|u_n| = \varepsilon_n |v_n|$$

à partir d'un certain rang. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut toujours écrire :

$$u_n = \text{sign}(u_n) |u_n| \quad \text{et} \quad |v_n| = \text{sign}(v_n) v_n.$$

Ainsi, pour n assez grand :

$$u_n = \text{sign}(u_n) |u_n| = \text{sign}(u_n) \varepsilon_n |v_n| = \underbrace{\text{sign}(u_n) \text{sign}(v_n) \varepsilon_n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} v_n,$$

donc $u_n = o(v_n)$. ■

Exemple 1.2.7. On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (-1)^n n \quad \text{et} \quad v_n := n^2.$$

Ainsi $|u_n| = n$ et $|v_n| = n^2$. On l'a déjà montré (deux fois !) dans les exemples précédents : $n = o(n^2)$. Ici, cela se traduit par $|u_n| = o(|v_n|)$, d'où l'on déduit directement $u_n = o(v_n)$.

Proposition 1.2.8. Soient u , v et w trois suites. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Démonstration. On trouve deux suites ε et η convergeant vers 0 et telles que :

$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad v_n = \eta_n w_n$$

pour n assez grand. Ainsi :

$$u_n = \underbrace{\varepsilon_n \eta_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} w_n.$$

■

Remarque 1.2.9. Si $u_n = o(v_n)$, alors v n'est pas négligeable devant u .

1.2.2 Suite dominée

Définition 1.2.10. Soient u et v deux suites. On dit que u est dominée par v (en $+\infty$), et on note $u_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ (ou plus simplement $u_n = \mathcal{O}(v_n)$), s'il existe une suite bornée η telle que

$$u_n = \eta_n v_n$$

à partir d'un certain rang.

Exemple 1.2.11. On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{2 \sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{1}{n}.$$

En posant $\eta_n := 2 \sin(n)$, on obtient :

$$u_n = 2 \sin(n) \frac{1}{n} = \eta_n v_n.$$

Par ailleurs :

$$|\eta_n| = 2|\sin(n)| \leq 2,$$

donc η est une suite bornée. On a ainsi montré $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 1.2.12. Soient u et v deux suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad v_n \neq 0.$$

Alors :

$$u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff \exists C \in \mathbb{R} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq C.$$

Démonstration. Sens direct. Supposons que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. On trouve une suite η bornée telle que

$$u_n = \eta_n v_n$$

à partir d'un certain rang. Pour $n \geq N$ assez grand, on a donc :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = |\eta_n| \leq C.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq C.$$

On définit une suite η par :

$$\eta_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n < N, \\ \frac{u_n}{v_n}, & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Alors η est bornée et $u_n = \eta_n v_n$ pour $n \geq N$. ■

Exemple 1.2.13. On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1+i}{n} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{1}{n}.$$

Comme v ne s'annule pas, on peut calculer :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \left| \frac{\frac{1+i}{n}}{\frac{1}{n}} \right| = |1+i| = \sqrt{2},$$

donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exemple 1.2.14. On définit u et v par :

$$u_n = n^2 + 3n + 2 \quad \text{et} \quad v_n = n^2 + 6n - 3.$$

Comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $v_n \geq 1$ (et en particulier, $v_n \neq 0$). Pour $n \geq N$, on peut donc écrire :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 6n - 3} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{6}{n} - \frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que, pour $n \geq N$, $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq C$, donc $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 1.2.15. Soient u et v deux suites. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Démonstration. Supposons que $u_n = o(v_n)$. On trouve alors une suite ε convergeant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang. Comme ε converge, elle est en particulier bornée, et ainsi $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. ■

Remarque 1.2.16. La réciproque est fausse. Par exemple, toute suite u vérifie $u_n = \mathcal{O}(u_n)$, mais $u_n \neq o(u_n)$.

Proposition 1.2.17. Soient u , v et w trois suites. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(w_n)$.

Démonstration. On trouve deux suites bornées η et η' telles que $u_n = \eta_n v_n$ et $v_n = \eta'_n w_n$ à partir d'un certain rang. Alors, pour n assez grand :

$$u_n = \eta_n \eta'_n w_n$$

avec la suite $\eta \eta'$ qui est bornée. ■

Proposition 1.2.18. Soient u et v deux suites. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration. On trouve une suite bornée η telle que $u_n = \eta_n v_n$ à partir d'un certain rang. Comme η est bornée, on trouve par ailleurs une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\eta_n| \leq C.$$

Ainsi, pour n assez grand :

$$|u_n| = |\eta_n| |v_n| \leq C |v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$
■

Exemple 1.2.19. Soient les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{(-1)^n \sin(2n) + i \cos(3n)}{n} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{1}{n}.$$

Comme v ne s'annule pas, on peut calculer :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = |(-1)^n \sin(2n) + i \cos(3n)| = \sqrt{\sin^2(2n) + \cos^2(3n)} \leq \sqrt{2},$$

et on en déduit que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. Comme par ailleurs $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1.2.3 Suite équivalente

Définition 1.2.20. Soient u et v deux suites. On dit que u est équivalente à v (en $+\infty$), et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ (ou plus simplement $u_n \sim v_n$), si :

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

Exemple 1.2.21. On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := n + 2 \quad \text{et} \quad v_n := n.$$

Alors :

$$u_n = v_n + 2.$$

Comme $2 = o(v_n)$, on a donc obtenu $u_n \sim v_n$.

Remarque 1.2.22. De manière équivalente, $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite ε convergeant vers 0 telle que

$$u_n = v_n + \varepsilon_n v_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

à partir d'un certain rang.

Proposition 1.2.23. Soient u et v deux suites. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad v_n \neq 0.$$

Alors :

$$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Démonstration. Sens direct. On trouve une suite ε convergeant vers 0 telle que

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

à partir d'un certain rang. Pour $n \geq N$ assez grand, on a donc

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Réciproquement, on définit la suite ε par

$$\varepsilon_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n < N, \\ \frac{u_n}{v_n} - 1, & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Alors $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$$v_n(1 + \varepsilon_n) = v_n \left(1 + \frac{u_n}{v_n} - 1 \right) = u_n$$

pour n assez grand. ■

Exemple 1.2.24. Soient les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \frac{1}{n+3} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{1}{n+2}.$$

Comme la suite v ne s'annule pas, on peut calculer :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+2}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où l'on déduit que $u_n \sim v_n$.

Proposition 1.2.25. Soient u , v et w trois suites. Alors :

1. $u_n \sim u_n$;
2. $u_n \sim v_n \iff v_n \sim u_n$;
3. $(u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n) \implies u_n \sim w_n$.

Démonstration. 1. On considère la suite $\varepsilon \equiv 0$. Alors $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = u_n(1 + \varepsilon_n)$.

2. Supposons que $u_n \sim v_n$. On trouve alors une suite ε convergeant vers 0 telle que

$$\forall n \geq N, \quad u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Comme $|\varepsilon_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on trouve par ailleurs $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_0, \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq N_0$, on a alors

$$1 + \varepsilon_n \geq 1 - |\varepsilon_n| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Pour $n \geq \max(N, N_0)$, on peut donc écrire

$$v_n = \frac{u_n}{1 + \varepsilon_n}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_n} - 1 = -\frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On définit alors la suite $\tilde{\varepsilon}$ par :

$$\tilde{\varepsilon}_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n < \max(N, N_0), \\ \frac{1}{1 + \varepsilon_n} - 1, & \text{si } n \geq \max(N, N_0). \end{cases}$$

Pour $n \geq \max(N, N_0)$, on a donc :

$$v_n = u_n \left(1 + \frac{1}{1 + \varepsilon_n} - 1 \right) = u_n(1 + \tilde{\varepsilon}_n).$$

3. On trouve ε et η convergeant vers 0 telles que $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ et $v_n = w_n(1 + \eta_n)$ à partir d'un certain rang. Alors, pour n assez grand :

$$u_n = w_n(1 + \eta_n)(1 + \varepsilon_n) = w_n(1 + \underbrace{\varepsilon_n + \eta_n + \varepsilon_n \eta_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}}).$$

■

Exemple 1.2.26. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $|u_n| < 1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On définit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n = \ln(1 + u_n)$. Alors $v_n \sim u_n$. En effet :

$$v_n = \ln(1 + u_n) = \ln(1 + u_n) - \ln(1),$$

car on a tout simplement $\ln(1) = 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis, on trouve $c_n \in [1 - |u_n|, 1 + |u_n|]$ tel que :

$$\ln(1 + u_n) - \ln(1) = \ln'(c_n)(1 + u_n - 1) = \frac{1}{c_n} u_n.$$

On pose $\eta_n := 1 - c_n \in [-|u_n|, |u_n|]$. Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. De plus :

$$v_n = \ln(1 + u_n) = \frac{u_n}{c_n} = \frac{u_n}{1 - \eta_n} = u_n \left(1 + \frac{1}{1 - \eta_n} - 1 \right) = u_n \left(1 + \frac{\eta_n}{1 - \eta_n} \right).$$

Proposition 1.2.27. Soient u et v deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u converge vers ℓ .

Démonstration. On trouve une suite ε convergeant vers 0 telle que $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ pour n assez grand. Or, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $1 + \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \times 1 = \ell$. ■

Proposition 1.2.28. Soient u et v deux suites réelles. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v tend vers $+\infty$. Alors u tend vers $+\infty$.

Démonstration. On trouve une suite ε convergeant vers 0 telle que $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ pour n assez grand. Soit $M > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_0$, $v_n \geq 2M$. Comme

$\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$. Pour $n \geq N_1$, on a donc $1 + \varepsilon_n \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour $n \geq \max(N_0, N_1)$ assez grand, on a :

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n) \geq 2M \times \frac{1}{2} = M.$$

■

Remarque 1.2.29. De la même façon, lorsque deux suites sont équivalentes et que l'une tend vers $-\infty$, alors l'autre tend également vers $-\infty$.

1.3 Sous-suites, suites extraites

Définition 1.3.1. Soit u une suite. On dit qu'une suite v est une sous-suite, ou suite extraite, de u s'il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Remarque 1.3.2. C'est l'application φ qui détermine la sous-suite.

Remarque 1.3.3. La suite elle-même est une sous-suite : on considère l'application $\varphi: n \mapsto n$.

Exemple 1.3.4. Soit u une suite. Les suites suivantes définissent des sous-suites :

- $v_n = u_{2n} = (u_0, u_2, u_4, \dots)$ la sous-suite des indices pairs, définie par $\varphi: n \mapsto 2n$;
- $v_n = u_{2n+1} = (u_1, u_3, u_5, \dots)$ la sous-suite des indices impairs, définie par $\varphi: n \mapsto 2n+1$;
- $v_n = u_{3n} = (u_0, u_3, u_6, \dots)$, définie par $\varphi: n \mapsto 3n$;
- $v = (u_1, u_2, \dots)$, la suite « décalée » définie par $\varphi: n \mapsto n+1$.

Proposition 1.3.5. Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, en particulier $\varphi(0) \geq 0$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geq n$. Comme φ est strictement croissante, on a :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$$

par hypothèse de récurrence. Or, $\varphi(n+1)$ est entier, donc on a obtenu $\varphi(n+1) \geq n+1$. ■

Proposition 1.3.6. Soit u une suite. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ si la suite est réelle ou $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite est complexe. Alors u converge vers ℓ si et seulement si toute suite extraite de u converge vers ℓ .

Démonstration. Dans un premier temps, supposons que toutes les sous-suites extraites de u convergent vers ℓ . Comme la suite u est sous-suite d'elle-même, alors elle converge vers ℓ .

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. On trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit v une sous-suite de u , définie par $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors, par application de la Proposition 1.3.5, pour $n \geq N$, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et ainsi $|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. ■

Exemple 1.3.7. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas car

$$u_{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

Définition 1.3.8. On appelle valeur d'adhérence d'une suite u toute limite finie d'une suite extraite de u .

Exemple 1.3.9. Comme le montre l'exemple précédent, 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$.

Proposition 1.3.10. Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit l'ensemble des pics de u :

$$\mathcal{E} := \{n \in \mathbb{N} ; \forall k \geq n, u_k \leq u_n\}.$$

Un entier $n \in \mathcal{E}$ est appelé pic de la suite u car toute valeur venant après est nécessairement plus petite que u_n . Une illustration est montrée dans la Figure 1.1.



FIGURE 1.1 – Exemple d'éléments d'une suite. Les éléments correspondants à des pics sont encadrés.

Cas 1 : infinité de pics ($\text{card}(\mathcal{E}) = +\infty$). On définit l'application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\varphi(0) := \min(\mathcal{E})$, $\varphi(1) := \min(\mathcal{E} \setminus \{\varphi(0)\})$, et ainsi de suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+1) := \min \left(\mathcal{E} \setminus \bigcup_{k=0}^n \{\varphi(k)\} \right).$$

On montre facilement que φ est strictement croissante. On définit la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n := u_{\varphi(n)}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc $v_n = u_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n+1)} = v_{n+1}$ car $\varphi(n)$ est un pic. Ainsi, v est décroissante.

Cas 2 : nombre fini de pics ($\text{card}(\mathcal{E}) < +\infty$). On pose :

$$k := \begin{cases} -1, & \text{si } \mathcal{E} = \emptyset, \\ \max(\mathcal{E}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n > k$, n n'est pas un pic car $n \notin \mathcal{E}$, donc il existe $N_n > n$ tel que $u_n < u_{N_n}$. On pose alors $\varphi(0) := k+1$, $\varphi(1) := N_{\varphi(0)}$, et ainsi de suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+1) = N_{\varphi(n)}.$$

Ainsi, la suite v définie par $v_n := u_{\varphi(n)}$ est (strictement) croissante. ■

Théorème 1.3.11 (Bolzano-Weirstrass). Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée : il existe $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq C.$$

D'après la [Proposition 1.3.10](#), il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ est monotone. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| = |u_{\varphi(n)}| \leq C,$$

donc v est bornée. Comme v est monotone et bornée, elle converge. ■

1.4 Suites de Cauchy

Définition 1.4.1. Une suite u est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Exemple 1.4.2. La suite u définie par $u_n := \frac{1}{n+1}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour $n \geq N$ et $m \geq N$:

$$|u_n - u_m| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proposition 1.4.3. Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit u une suite convergente de limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. On trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $n \geq N$ et $m \geq N$. Alors :

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Proposition 1.4.4. Soit u une suite telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|.$$

Alors u est une suite de Cauchy.

Démonstration. Commençons par remarquer :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}| \leq k^2|u_{n-1} - u_{n-2}| \leq \dots \leq k^n|u_1 - u_0|.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$|u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_{n+p-1} - u_n| = \dots = \left| \sum_{m=n}^{n+p-1} (u_{m+1} - u_m) \right|.$$

On applique l'inégalité triangulaire et la remarque qui précède :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{m=n}^{n+p-1} |u_{m+1} - u_m| \leq \sum_{m=n}^{n+p-1} k^m |u_1 - u_0|.$$

Comme le terme $|u_1 - u_0|$ ne dépend pas de m , on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n - k^{n+p}}{1 - k} < \frac{k^n}{1 - k} |u_1 - u_0|,$$

cette dernière inégalité étant obtenue car $k > 0$. Comme de plus, $k < 1$, on obtient que $k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq N$, on a alors :

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui montre que u est de Cauchy. ■

Remarque 1.4.5. Ce résultat reste vrai si l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

Proposition 1.4.6. Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit u une suite de Cauchy. On trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall m \geq N, \quad |u_n - u_m| \leq 1.$$

Ainsi, pour $n \geq N$:

$$|u_n| = |u_n - u_N + u_N| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

Soit

$$C := \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u_n|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $n \leq N$, $|u_n| \leq C \leq C + 1$. Si $n \geq N$, alors $|u_n| \leq 1 + |u_N| \leq 1 + C$. Ainsi, la suite u est bornée par $C + 1$. ■

Proposition 1.4.7. Soit u une suite. Supposons que u soit de Cauchy et admette une sous-suite convergente. Alors u est convergente.

Démonstration. Soient $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et ℓ tels que la suite v définie par $v_n := u_{\varphi(n)}$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. On trouve :

- $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1, |v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
- $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2, \forall m \geq N_2, |u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On rappelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Ainsi, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$|u_n - \ell| = |u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. ■

Théorème 1.4.8. Toute suite réelle de Cauchy converge.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Alors u est bornée. Par le [Théorème 1.3.11](#), elle admet donc une sous-suite convergente. On applique alors la [Proposition 1.4.7](#). ■

Remarque 1.4.9. Il est naturel de se poser la question de l'utilité de la notion de suite de Cauchy après ce résultat : en effet, pour une suite réelle, être de Cauchy et être convergente est complètement équivalent. On dit que $\mathbb{R}$ est complet. Pour trouver des exemples de suites de Cauchy qui ne convergent pas, il faut donc considérer d'autres ensembles. Les suites complexes ne vont pas nous aider non plus, car on peut montrer que $\mathbb{C}$ est également complet. Des contre-exemples peuvent cependant être trouvés si on regarde du côté de $\mathbb{Q}$.

Considérons par exemple la suite $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

On peut montrer que tous les éléments de cette suite sont bien rationnels. Par ailleurs, il est possible de montrer que u est décroissante et minorée : en tant que suite réelle, elle converge donc vers un élément $\ell \in \mathbb{R}$. En tant que suite convergente, on constate alors que u est de Cauchy. Cependant, après quelques calculs, on montre que $\ell = \sqrt{2}$. La suite est donc bien de Cauchy, mais elle ne converge pas vers un élément de l'ensemble lui-même. Notons qu'il est possible de montrer que cette suite est de Cauchy sans passer par des arguments utilisant $\mathbb{R}$: on pourra par exemple se pencher sur l'[Exercice 1.2](#). Il ne s'agit pas d'un exemple exotique : d'autres suites rationnelles ont le même comportement. Une légère modification de la définition de la suite précédente permet de converger vers $\sqrt{a}$ pour n'importe quel réel $a > 0$. Mieux que ça, si on considère n'importe quel réel $x \in \mathbb{R}$, on peut montrer que la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

converge vers x . On peut même remplacer le 10 par un $b \in \mathbb{N}$ quelconque, tant que $b \geq 2$.

Tous ces exemples illustrent en fait le besoin de définir $\mathbb{R}$: dans $\mathbb{Q}$, on trouve des « trous », c'est-à-dire qu'on y trouve des suites qui convergent, mais en dehors de l'ensemble lui-même. Avec $\mathbb{R}$, on comble ces trous.

Dans le premier exemple de cette remarque, on passe par montrer que la suite est convergente pour en déduire qu'elle est de Cauchy, mais il est aussi possible de montrer directement que la suite est de Cauchy. C'est finalement tout l'intérêt de cette notion : on montre que les éléments sont de plus en plus proches les uns des autres, ce qui ressemble à une notion de convergence, mais sans avoir besoin de connaître la limite pour autant.

Exercice 1.2

Solution page 20.

Soit $u \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2.$$

3. En déduire que u est décroissante à partir du rang 1.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n > 0$ tel que :

$$|u_{n+1} - u_n| = k_n |u_n - u_{n-1}|.$$

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad k_n < \frac{1}{2}.$$

6. En déduire que u est de Cauchy.

1.5 Solutions des exercices**Solution de l'Exercice 1.1**

Commençons par le sens facile : supposons que (ii) est vraie, c'est-à-dire que u est bornée. Alors u est bornée à partir du rang 0. Ou du rang 3. Ou du rang 20160102, ça marche aussi.

Supposons maintenant que (i) est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $C_1 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq C_1.$$

Soit :

$$C_0 := \max_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket} |u_n|.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C := \max(C_0, C_1)$.

Solution de l'Exercice 1.2

1. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $u_0 > 0$, donc le résultat est vrai au rang $n = 0$. Supposons qu'il soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > 0,$$

ce qui termine la preuve.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la définition :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

Ainsi :

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^4 + 4u_n^2 + 4}{4u_n^2} = \frac{u_n^4 - 4u_n^2 + 4 + 8u_n^2}{4u_n^2} = \frac{(u_n^2 - 2) + 8u_n^2}{4u_n^2} \geq \frac{8u_n^2}{4u_n^2} = 2.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n > 0$, on peut considérer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n^2}.$$

Or, $u_n^2 \geq 2$, donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1,$$

ce qui montre que $u_{n+1} \leq u_n$: u est donc décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par calculer :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Or :

$$\begin{aligned} 2 - u_n^2 &= 2 - \left(\frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}} \right)^2 = 1 - \frac{u_{n-1}^2}{4} - \frac{1}{u_{n-1}^2} \\ &= - \left(\frac{u_{n-1}}{2} - \frac{1}{u_{n-1}} \right)^2 = - \left(\frac{2 - u_{n-1}^2}{2u_{n-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{2 - u_{n-1}^2}{2u_{n-1}},$$

on obtient :

$$2 - u_n^2 = -(u_n - u_{n-1})^2.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = - \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2u_n},$$

d'où :

$$|u_{n+1} - u_n| = k_n |u_n - u_{n-1}|,$$

avec :

$$k_n := \frac{|u_n - u_{n-1}|}{2u_n}.$$

5. Comme u est décroissante à partir du rang 1, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n-1}$.
Ainsi :

$$|u_n - u_{n-1}| = u_{n-1} - u_n = u_{n-1} - \frac{u_{n-1}}{2} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{2} - \frac{1}{u_{n-1}}.$$

Comme $u_{n-1} > 0$, on obtient :

$$|u_n - u_{n-1}| < \frac{u_{n-1}}{2}.$$

Ainsi :

$$k_n < \frac{1}{4} \frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

De plus :

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_{n-1}}{\frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}}} = \frac{2u_{n-1}^2}{u_{n-1}^2 + 2} = 2 \underbrace{\frac{u_{n-1}^2}{u_{n-1}^2 + 2}}_{<1} < 2,$$

d'où :

$$k_n < \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

6. On invoque simplement la [Proposition 1.4.4](#).

Chapitre 2

Développements limités

2.1 Définitions, premières propriétés

Définition 2.1.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in I$. On dit que f admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n et une fonction $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Le polynôme P est appelé partie régulière. En notant

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

on obtient

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x),$$

et chaque réel a_k , pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, est appelé coefficient d'ordre k du développement limité de f en 0.

Exemple 2.1.2. Soit $f: x \mapsto 3 + 2x + x^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on peut alors écrire :

$$f(x) = 3 + 2x + x^2 + x^n \varepsilon_0(x),$$

où ε_0 est la fonction identiquement nulle. On peut également écrire le développement limité de f à l'ordre 1 :

$$f(x) = 3 + 2x + x \varepsilon_1(x),$$

où $\varepsilon_1: x \mapsto x$. Et pour finir, le développement limité de f à l'ordre 0 :

$$f(x) = 3 + \varepsilon_2(x),$$

où $\varepsilon_2: x \mapsto 2x + x^2$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 2.1

Indications page 50. Solution page 51.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-x)(1+x+\dots+x^n) = (1-x^{n+1}).$$

2. En déduire le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

3. En déduire le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Définition 2.1.3. Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que g admet un développement limité en un point $x_0 \in I$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si la fonction

$$\begin{aligned} f: I - x_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x + x_0) \end{aligned}$$

admet un développement limité en 0 à l'ordre n .Pour un développement limité de g en x_0 , on obtient :

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

À partir de maintenant, on ne s'intéresse aux développements limités en 0. On considère donc une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.

Lemme 2.1.4. Supposons que f admette un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un développement limité en 0 à l'ordre k , obtenu en « tronquant » le développement limité à l'ordre n .

Démonstration. Le cas $k = n$ est évident. On suppose alors $0 \leq k < n$. Pour $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_nx^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + x^k \underbrace{(a_{k+1}x + \dots + a_nx^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x))}_{\tilde{\varepsilon}(x)} \end{aligned}$$

avec $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. ■

Théorème 2.1.5. Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors ce développement limité est unique.

Démonstration. On procède par récurrence sur n . On note :

Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n ,
les coefficients de la partie régulière sont uniques. ($H(n)$)

Initialisation. Supposons que, pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \varepsilon_a(x) \\ &= b_0 + \varepsilon_b(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Alors, en particulier :

$$a_0 + \varepsilon_a(x) = b_0 + \varepsilon_b(x).$$

En faisant tendre x vers 0 dans cette égalité, on obtient

$$a_0 = b_0$$

et ainsi ($H(0)$) est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel ($H(n)$) est vraie. Supposons que f admette un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_a(x) \\ &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_b(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On applique le [Lemme 2.1.4](#) pour écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\tilde{\varepsilon}_a(x) \\ &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n\tilde{\varepsilon}_b(x) \end{aligned}$$

avec $\tilde{\varepsilon}_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\tilde{\varepsilon}_b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Par hypothèse, ($H(n)$) est vraie, donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = b_k.$$

Pour $x \in I$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_a(x) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_b(x). \end{aligned}$$

En particulier :

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_b(x),$$

et donc :

$$a_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_a(x) = b_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_b(x).$$

Pour $x \neq 0$, on obtient ainsi :

$$a_{n+1} + \varepsilon_a(x) = b_{n+1} + \varepsilon_b(x).$$

On fait alors tendre x vers 0 pour obtenir :

$$a_{n+1} = b_{n+1},$$

et ainsi $(H(n+1))$ est vraie. ■

Lemme 2.1.6. La fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 si et seulement si f est continue en 0. On a alors $a_0 = f(0)$.

Démonstration. Dans un premier temps, supposons f continue en 0. Alors, pour $x \in I$:

$$f(x) = f(0) + \underbrace{f(x) - f(0)}_{=:\varepsilon(x)}.$$

Par continuité de f , on obtient :

$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - f(0)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 avec $a_0 = f(0)$.

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 0 en 0. On écrit alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. En considérant $x = 0$ dans cette égalité, on obtient :

$$f(0) = a_0.$$

Ainsi :

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - a_0| = |\varepsilon(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc f est continue en 0. ■

Lemme 2.1.7. La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0. On a alors $a_1 = f'(0)$.

Démonstration. Dans un premier temps, supposons que f admette un développement limité d'ordre 1 en 0. On écrit alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1x + x\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. En appliquant le [Lemme 2.1.4](#), on obtient que f admet un développement limité d'ordre 0 en 0, ce qui implique, en appliquant le [Lemme 2.1.6](#), que $a_0 = f(0)$. Ainsi :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + a_1x + x\varepsilon(x).$$

Pour $x \neq 0$, on a ainsi :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1,$$

donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = a_1$.

Réciproquement, supposons f dérivable en 0. On note

$$\varepsilon: x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc f admet un développement limité d'ordre 1 en 0. ■

Attention, ces équivalences s'arrêtent à l'ordre 1 : par exemple, ce n'est pas parce qu'une fonction admet un développement limité d'ordre 2 en 0 qu'elle est pour autant deux fois dérivable en ce point. On pourra s'en convaincre avec l'exercice qui suit.

Exercice 2.2

[Indications page 50.](#) [Solution page 52.](#)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet aucun développement limité en 0.

Proposition 2.1.8. Supposons f dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = x^n \varepsilon(x)$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x),$$

avec $\tilde{\varepsilon}: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Démonstration. On applique le théorème des accroissements finis entre 0 et $x \in I$: il existe c_x tel que $0 < |c_x| < |x|$ pour lequel

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)x.$$

Ainsi, par hypothèse sur f' :

$$f(x) = f(0) + xc_x^n \varepsilon(c_x).$$

On pose :

$$\tilde{\varepsilon}: x \mapsto \begin{cases} \frac{xc_x^n \varepsilon(c_x)}{x^{n+1}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$, on a alors :

$$f(x) = f(0) + x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x).$$

De plus, comme $c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on obtient :

$$|\tilde{\varepsilon}(x)| = \frac{|x||c_x|^n}{|x|^{n+1}} |\varepsilon(c_x)| \leq \frac{|x||x|^n}{|x|^{n+1}} |\varepsilon(c_x)| = |\varepsilon(c_x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

d'où le résultat. ■

Ce résultat peut être vu comme une sorte de primitivation de développement limité pour une certaine classe de fonctions : il faut pour cela que f' vérifie une hypothèse qui paraît plutôt restrictive. Le résultat suivant permet d'aller (beaucoup) plus loin.

Proposition 2.1.9. Supposons que f admette une primitive F sur I , et qu'elle admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 donnée par :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x),$$

avec $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Démonstration. On pose

$$G: x \mapsto F(x) - a_0x - a_1 \frac{x^2}{2} - \dots - a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Alors G est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = f(x) - a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n = x^n \varepsilon(x)$$

par hypothèse sur f . On applique alors la [Proposition 2.1.8](#) : il existe $\tilde{\varepsilon}: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et

$$G(x) = G(0) + x^{n+1} \tilde{\varepsilon}(x),$$

ce qui termine la preuve puisque $G(0) = F(0)$. ■

Remarque 2.1.10. Une façon de retenir ce résultat est de le voir comme une « primitivation » du développement limité de f pour obtenir celui de F . Attention cependant : il ne s'agit pas d'une primitivation à proprement parler, puisque la fonction $\cdot^{n+1} \tilde{\varepsilon}$ n'est pas nécessairement une primitive de $\cdot^n \varepsilon$. En revanche, il s'agit bien de primitiver la partie régulière du développement limité de f .

Exercice 2.3

[Indications page 50.](#) [Solution page 53.](#)

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 2.4

[Solution page 53.](#)

1. Donner le développement limité de $\exp$ à l'ordre 0 en 0.
2. En déduire le développement limité de $\exp$ à l'ordre 1 en 0.
3. Conjecturer le développement limité de $\exp$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0.
4. Démontrer la formule conjecturée.

Exercice 2.5

[Solution page 54.](#)

1. Donner les développements limités de $\sin$ et $\cos$ à l'ordre 0 en 0.
2. En déduire le développement limité de $\sin$ et $\cos$ à l'ordre 1 en 0.
3. Déterminer les développements limités de $\sin$ et $\cos$ à un ordre quelconque en 0.

2.2 Notation de Landau

Définition 2.2.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur I . On dit que f est négligeable devant g en x_0 , et on note $f = o_{x \rightarrow x_0}(g)$, s'il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon :]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x).$$

Remarque 2.2.2. À la différence des suites où seul le comportement à l'infini nous intéressait, ici on peut s'intéresser à une infinité de points différents, ce qui implique l'introduction du voisinage de x_0 . Hormis cela, la définition est moralement la même, et on peut adapter les preuves des différents résultats pour montrer qu'ils sont aussi vrais dans le cas des fonctions. Par exemple, si g ne s'annule pas sur le voisinage $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, alors

$$f = o_{x \rightarrow x_0}(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Dans les développements limités, on pourra donc remplacer le terme $x^n \varepsilon(x)$ par $o(x^n)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

Proposition 2.2.3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$:

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$,
2. $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$,
3. $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$.

Démonstration. 1. On trouve deux fonctions ε_1 et ε_2 tendant vers 0 telles que :

$$x^n \varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_2(x) = x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\rightarrow 0}.$$

2. On trouve deux fonctions ε_1 et ε_2 tendant vers 0 telles que :

$$x^n \varepsilon_1(x) \times x^m \varepsilon_2(x) = x^{n+m} \underbrace{\varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x)}_{\rightarrow 0}.$$

3. On trouve deux fonctions ε_1 et ε_2 tendant vers 0 telles que :

$$x^n \varepsilon_1(x) - x^n \varepsilon_2(x) = x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))}_{\rightarrow 0}.$$

■

Remarque 2.2.4. La preuve de ce dernier résultat est relativement facile en revenant à la définition. Elle permet cependant de comprendre pourquoi il ne faut jamais écrire $o(x^n) - o(x^n) = 0$. La notation $o(\cdot)$ n'est qu'une notation, il ne s'agit pas d'une fonction : il n'y a aucune raison, en général, de supposer l'égalité des fonctions impliquées.

Exemple 2.2.5. On considère la fonction $f: x \mapsto e^x \cos(x)$, dont on cherche à écrire le développement limité à l'ordre 2. Pour cela, on peut commencer par écrire :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - \frac{x^3}{2} + xo(x^2) \\ &\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}o(x^2) + o(x^2) - \frac{x^2}{2}o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \end{aligned}$$

simplement en développant. Notre objectif est d'obtenir une expression de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2).$$

Il y a donc encore un peu de travail. On peut déjà commencer par appliquer le résultat précédent :

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2),$$

ce qui permet de simplifier un tout petit peu l'expression précédemment obtenue. Commençons par nous occuper de tous les termes en petit o. Le dernier est notamment

$$o(x^2)o(x^2) = o(x^4),$$

toujours par application du résultat précédent. On peut cependant vérifier que $o(x^4) = o(x^2)$, donc ce terme va lui aussi « rentrer » dans le petit o final. On a par ailleurs d'autres termes où il s'agit de multiplier un petit o par une puissance de x . Traitons par exemple :

$$xo(x^2) = o(x^3) = o(x^2).$$

De la même façon, tous les termes en petit o peuvent être rassemblés en un seul et même terme. On obtient donc à ce stade :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^2).$$

C'est déjà mieux, mais ce n'est pas fini : la partie régulière d'un développement limité d'ordre 2 doit être un polynôme de degré au plus 2, ce qui n'est pas le cas ici. Il faut cependant se rappeler que nous sommes au voisinage de 0, donc :

$$x^3 = o(x^2) \quad \text{et} \quad x^4 = o(x^2).$$

Ainsi :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Il ne reste plus qu'à simplifier en rassemblant les termes de même degré. On obtient finalement :

$$f(x) = 1 + x + o(x^2).$$

Définition 2.2.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur I . On dit que f est bornée asymptotiquement par g en x_0 , et on note $f = \mathcal{O}_{x \rightarrow x_0}(g)$, s'il existe $\eta > 0$ et $c:]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\rightarrow \mathbb{R}$ bornée tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad f(x) = g(x)c(x).$$

Remarque 2.2.7. Ici encore, les résultats démontrés dans le cadre des suites peuvent facilement être étendus au cadre des fonctions. De même, les propriétés de sommes et multiplications démontrées précédemment pour les $o(\cdot)$ sont aussi vraies pour les $\mathcal{O}(\cdot)$.

Définition 2.2.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur I . On dit que f est équivalente à g en x_0 , et on note $f \sim_{x \rightarrow x_0} g$, s'il existe $\eta > 0$ et $\varepsilon:]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)).$$

Remarque 2.2.9. Encore une fois, on peut étendre les résultats obtenus sur les suites équivalentes.

2.3 Formules de Taylor

2.3.1 Fonctions n fois dérivables

Définition 2.3.1. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre n de f sur I , notée $f^{(n)}$, est définie par récurrence par :

$$— f^{(0)} := f,$$

— si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I , alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
On dit que f est n fois dérivable si $f^{(n)}$ est définie.

Ainsi, $f^{(0)}$ est simplement la fonction f . Pour f dérivable, $f^{(1)} = f'$ est la dérivée, et ainsi de suite.

Remarque 2.3.2. Comme la dérivabilité implique la continuité, si f est n fois dérivable sur I , alors $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n-1)}$ sont continues sur I .

Définition 2.3.3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est $n \in \mathbb{N}$ fois dérivable en $a \in I$ si :

- il existe un intervalle ouvert $\tilde{I}$ tel que $a \in \tilde{I} \subset I$ et sur lequel f est $n - 1$ fois dérivable ;
- $f^{(n-1)}$ admet une dérivée en a , notée $f^{(n)}(a)$.

Remarque 2.3.4. Une fonction f est n fois dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est n fois dérivable en tout point de I .

Remarque 2.3.5. Par définition, si f est n fois dérivable, alors elle est k fois dérivable pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Proposition 2.3.6. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I . Si f et g sont n fois dérivables, alors pour tous réels λ et μ , la fonction $h := \lambda f + \mu g$ est n fois dérivable et :

$$h^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ est trivial :

$$h^{(0)} = h = \lambda f + \mu g = \lambda f^{(0)} + \mu g^{(0)}.$$

Le cas $n = 1$ est une conséquence de la linéarité de la dérivée :

$$h^{(1)} = h' = \lambda f' + \mu g' = \lambda f^{(1)} + \mu g^{(1)}.$$

Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g sont $n + 1$ fois dérivables. En particulier, elles sont une fois dérivables et on peut ainsi définir

$$h' = \lambda f' + \mu g'.$$

Comme f et g sont $n + 1$ fois dérivables, f' et g' sont n fois dérivables, et on peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir que h' est n fois dérivable avec :

$$(h')^{(n)} = \lambda (f')^{(n)} + \mu (g')^{(n)},$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.3.7. Soient f et g deux fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ toutes les deux n fois dérivables. Alors $h := fg$ est n fois dérivable sur I et :

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial :

$$h^{(0)} = h = fg = f^{(0)} g^{(0)}.$$

Au rang $n = 1$, on obtient :

$$h' = f'g + fg',$$

donc le résultat est vrai également. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f et g sont $n + 1$ fois dérivables. En particulier, elles sont au moins une fois dérivable, donc h l'est aussi avec $h' = f'g + fg'$. Or, comme f et g sont $n + 1$ fois dérivables, les fonctions f' , g , f et g' sont n fois dérivables. Par hypothèse de récurrence, les fonctions $f'g$ et fg' sont donc elles aussi n fois dérivables. Ainsi, la [Proposition 2.3.6](#) implique que h' est n fois dérivable avec :

$$\begin{aligned} (h')^{(n)} &= (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} (g')^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &\quad + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

On réorganise un peu :

$$(h')^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{kn! + (n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \binom{n+1}{k}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

On a ainsi obtenu :

$$h^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},$$

donc le résultat est vrai également au rang $n+1$. ■

Proposition 2.3.8. Si $f: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur I et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur J , alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I .

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On suppose alors que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier, elles sont une fois dérivables et on peut définir :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Comme f et g sont $n+1$ fois dérivables, g' et f sont n fois dérivables. Par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est donc elle aussi n fois dérivable. De plus, f' est aussi n fois dérivable, donc on peut appliquer la [Proposition 2.3.7](#) : $(g \circ f)'$ est un produit de deux fonctions n fois dérivables, et est donc n fois dérivable. ■

Proposition 2.3.9. Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I qui ne s'annule pas. Alors la fonction

$$f: x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$

est n fois dérivable sur I .

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. On suppose que g est $n + 1$ fois dérivable. En particulier, elle est une fois dérivable et on peut donc définir

$$f' = \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Comme g est $n + 1$ fois dérivable, elle est n fois dérivable, donc (conséquence de la [Proposition 2.3.7](#)), g^2 est elle aussi n fois dérivable. De plus, g ne s'annule pas sur I , donc g^2 non plus, et ainsi la fonction $\frac{1}{g^2}$ est n fois dérivable par hypothèse de récurrence. Toujours parce que g est $n + 1$ fois dérivable, g' est n fois dérivable, donc $f' = -g' \cdot \frac{1}{g^2}$ est n fois dérivable en tant que produit de deux fonctions n fois dérivables. ■

Proposition 2.3.10. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors :

- f est une bijection de I vers $J := f(I)$;
- f^{-1} est n fois dérivable sur J .

Démonstration. Le fait que f définisse une bijection est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : comme f' ne s'annule pas, elle est de signe constant et on en déduit que f est strictement monotone.

Pour le reste, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ est classique :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Supposons le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est $n + 1$ fois dérivable. En particulier, elle est une fois dérivable et on peut définir

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Comme f est $n + 1$ fois dérivable, f' est n fois dérivable. De plus, f est aussi n fois dérivable donc, par hypothèse de récurrence, f^{-1} est n fois dérivable. Ainsi, par la [Proposition 2.3.8](#), $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable. Comme de plus f' ne s'annule pas, il en va de même pour $f' \circ f^{-1}$, et ainsi, par la [Proposition 2.3.9](#), on en déduit que $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est n fois dérivable, d'où le résultat. ■

On termine cette section avec une définition permettant de mettre en avant un point important : on a dit précédemment que le fait qu'une fonction soit n fois dérivable impliquait que toutes ses dérivées jusqu'au rang $n - 1$ étaient continues. Cela n'implique cependant pas que la n -ème dérivée est elle-même continue. Lorsque cela est vrai, on dispose de la notation suivante.

Définition 2.3.11. On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I .

La [Remarque 2.3.2](#) devient alors : si f est n fois dérivable, alors $f \in \mathcal{C}^{n-1}$.

Définition 2.3.12. On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Formules de Taylor

On a vu précédemment que si $f: I \ni 0 \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0, on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

On va voir que si f est n fois dérivable en 0, alors les a_k s'expriment en fonction de $f^{(k)}(0)$. Avec un peu plus de régularité, on pourra même estimer le reste $o(x^n)$.

Théorème 2.3.13 (Formule de Taylor-Young). Soit $f: I \ni 0 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable $n \in \mathbb{N}$ fois en 0. Alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n). \end{aligned}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ a déjà été traité (voir [Lemme 2.1.7](#)). Supposons le résultat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f: I \ni 0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable en 0. En particulier, f' est n fois dérivable en 0. Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= f'(0) + \dots + (f')^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= f'(0) + \dots + f^{(n+1)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

La [Proposition 2.1.9](#) permet alors d'écrire :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}).$$

Ainsi, le résultat est vrai au rang $n+1$. ■

En conclusion, si f est n fois dérivable en 0, alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Corollaire 2.3.14. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable $n \in \mathbb{N}$ en $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $g: x \mapsto f(x+a)$ définie sur

$$J := \{x - a ; x \in I\}.$$

En particulier, comme $a \in I$, $0 \in J$ et g satisfait les hypothèses d'application de la formule de Taylor-Young. Ainsi :

$$g(h) = \sum_{k=0}^n g^{(k)}(0)\frac{h^k}{k!} + o(h^n)$$

pour $h \in J$. On obtient alors le résultat en revenant à la définition de g . ■

Exercice 2.6

[Solution page 54.](#)

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction tangente.

Avant d'aller plus loin et d'estimer le terme $o(x^n)$, nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 2.3.15. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable avec $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tel que

$$f(a) = f(b) \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = 0.$$

Alors il existe $c \in]\min(a, b), \max(a, b)[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ n'est autre que le théorème de Rolle. Supposons donc le résultat vrai à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+2$ fois dérivable. On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tel que :

$$f(a) = f(b) \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, f^{(k)}(a) = 0.$$

On note

$$A := \min(a, b) \quad \text{et} \quad B := \max(a, b).$$

En appliquant le théorème de Rolle, on trouve $c \in]A, B[$ tel que $f'(c) = 0$. Or, f' est $n+1$ fois dérivable sur I avec :

$$f'(a) = f'(c) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (f')^{(k)}(a) = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe ainsi $d \in]\min(a, c), \max(a, c)[\subset]A, B[$ tel que $0 = (f')^{(n+1)}(d) = f^{(n+2)}(d)$. ■

Théorème 2.3.16 (Formule de Taylor-Lagrange). Soit $f: I \ni 0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n \in \mathbb{N}^*$ fois dérivable sur I . Alors, pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in [\min(0, x), \max(0, x)]$ tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}x^n.$$

Démonstration. Si $x = 0$, alors on vérifie facilement que le choix $c_x = 0$ convient. On va donc désormais supposer $x \neq 0$.

Pour tout réel K , on définit :

$$G_K: t \in I \mapsto f(t) - \left(f(0) + f'(0)t + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + K\frac{t^n}{n!} \right).$$

Comme $x \neq 0$, on peut fixer $K \in \mathbb{R}$ tel que $G_K(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + K\frac{x^n}{n!}.$$

Comme f est n fois dérivable sur I par hypothèse, il en est de même pour G_K . Par définition, $G_K(x) = 0$. De plus, on vérifie facilement que $G_K(0) = 0$. Ainsi :

$$G_K(0) = G_K(x).$$

De plus, on vérifie toujours aussi facilement que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad G_K^{(k)}(0) = 0.$$

On peut alors appliquer la [Proposition 2.3.15](#) : il existe $c_x \in]\min(0, x), \max(0, x)[$ tel que $G_K^{(n)}(c_x) = 0$. Or :

$$G_K^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(c_x) - K,$$

donc

$$K = f^{(n)}(c_x),$$

et on obtient le résultat. ■

Remarque 2.3.17. Dans le cas $n = 1$, on retrouve le théorème des accroissements finis classique.

Remarque 2.3.18. Si $x \neq 0$, alors c_x est strictement compris entre 0 et x .

Exercice 2.7

Solution page 55.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Corollaire 2.3.19. Sous les mêmes hypothèses que celle du [Théorème 2.3.16](#), si de plus $f^{(n)}$ est bornée sur I , alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \mathcal{O}(x^n).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe : il suffit d'appliquer le [Théorème 2.3.16](#) puis de passer à la valeur absolue. ■

Exercice 2.8

Solution page 56.

Soient deux réels $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$. Soit $x \in]a, b[$. On définit

$$D_x : h \mapsto \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

Montrer que :

$$f''(x) - D_x(h) = \mathcal{O}(h^2).$$

Théorème 2.3.20 (Formule de Taylor avec reste intégral, ou formule de Taylor-Laplace). Soit $f : I \ni 0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} ds.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas $n = 1$, on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{f^{(1)}(s)}{0!}(x-s)^0 ds = \int_0^x f'(s) ds = f(x) - f(0),$$

d'où le résultat. Supposons que la formule soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Ainsi, f est $n+1$ fois dérivable et, en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^n$. Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} ds.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!} (x-s)^{n-1} ds = - \left[f^{(n)}(s) \frac{(x-s)^n}{n!} \right]_0^x + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!} (x-s)^n ds.$$

On peut alors calculer :

$$- \left[f^{(n)}(s) \frac{(x-s)^n}{n!} \right]_0^x = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

et on obtient ainsi le résultat. ■

Exercice 2.9

[Solution page 56.](#)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et telle que $f^{(n)} = 0$.
Montrer que f est une fonction polynomiale.

2.3.3 Développements limités des fonctions usuelles

La formule de Taylor-Young nous permet d'obtenir les développements limités de fonctions dont on connaît les dérivées. Considérons par exemple la fonction

$$f_1: \frac{1}{1-x}.$$

On peut montrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_1^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n f_1^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k!}{1} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

On peut faire de même avec la fonction

$$f_2: x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

dont les dérivées sont données par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_2^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Remarque 2.3.21. On aurait pu tout aussi bien effectuer un changement de variable dans le développement limité précédent.

Considérons maintenant

$$f_3: x \mapsto \ln(1+x).$$

Là encore, une récurrence permet de montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= f_3(0) + \sum_{k=1}^n f_3^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \ln(1+0) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \end{aligned}$$

Parmi les fonctions usuelles, il en est une dont le développement limité est particulièrement facile à obtenir avec les formules de Taylor : l'exponentielle, dont la dérivée n'est autre qu'elle-même. Ainsi :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n e^0 \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \end{aligned}$$

De ce développement limité, on peut en déduire celui des fonctions hyperboliques. En effet :

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant aux puissances. Le cas des fonctions du type

$$x \mapsto (1+x)^m$$

avec $m \in \mathbb{N}$ avec assez vite réglé. Considérons donc plutôt

$$f_4: x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

On vérifie par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell) (1+x)^{\alpha-k}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \prod_{\ell=0}^{k-1} (\alpha - \ell) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2} + \dots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1)) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).\end{aligned}$$

Profitons de ce petit détour dans le monde des dérivées des fonctions usuelles pour démontrer un résultat qui peut avoir son utilité.

Lemme 2.3.22. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ est trivial :

$$\sin^{(0)}(x) = \sin(x) = \sin\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right),$$

et il en va de même pour le cosinus. Supposons donc la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos^{(n)}(x) \\ &= (\sin')^{(n)}(x) \\ &= \sin^{(n+1)}(x).\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \\
 &= -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\sin^{(n)}(x) \\
 &= (\cos')^{(n)}(x) \\
 &= \cos^{(n+1)}(x),
 \end{aligned}$$

et ainsi les formules sont également vraies au rang $n+1$. ■

De ce résultat, on peut notamment obtenir :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,$$

et ainsi :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

De même, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0,$$

d'où :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Remarque 2.3.23. Comme on a pu le voir à travers certains exemples et exercices, les formules de Taylor ne sont pas le seul moyen d'obtenir un développement limité, et il ne s'agit pas non plus toujours du plus simple !

2.4 Étude d'extrema

Dans cette section, on fixe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

2.4.1 Point critique

Définition 2.4.1. Soient $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que :

— f admet un maximum local en x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad f(x) \leq f(x_0) ;$$

— f admet un minimum local en x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad f(x) \geq f(x_0) ;$$

— f admet un extremum local en x_0 si f admet un minimum local ou un maximum local en x_0 .

Exemple 2.4.2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ admet deux minima locaux en ± 1 , et un maximum local en 0, comme illustré dans la [Figure 2.1](#).

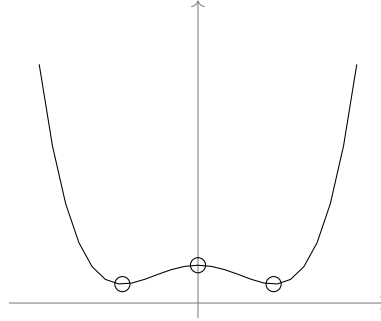


FIGURE 2.1 – La fonction $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ admet plusieurs extrema locaux.

Définition 2.4.3. Soient $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que :

— f admet un maximum global en x_0 si :

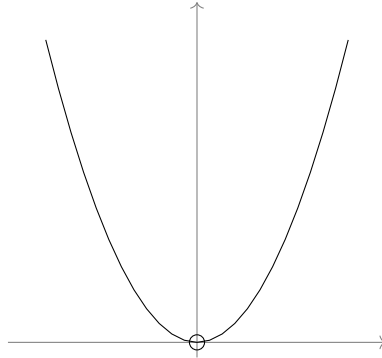
$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) \leq f(x_0) ;$$

— f admet un minimum global en x_0 si :

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) \geq f(x_0) ;$$

— f admet un extremum global en x_0 si f admet un minimum global ou un maximum global en x_0 .

Exemple 2.4.4. La fonction $x \mapsto x^2$ admet un minimum global en 0, comme illustré dans la [Figure 2.2](#).

FIGURE 2.2 – La fonction $x \mapsto x^2$ admet un minimum global en 0.

Remarque 2.4.5. Un extremum global est aussi un extremum local, mais la réciproque n'est pas vraie (dans l'Exemple 2.4.2, le maximum local n'est pas global, de manière plutôt évidente).

Remarque 2.4.6. Il n'y a pas nécessairement unicité d'un extremum, même lorsqu'il est global. Par exemple, la fonction $\cos$ admet une infinité d'extrema globaux : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cos(2n\pi) = 1$ et $\cos((2n+1)\pi) = -1$, donc $2n\pi$ est un maximum global et $(2n+1)\pi$ est un minimum global.

Définition 2.4.7. Soient $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

Proposition 2.4.8. Soient $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors x_0 est un point critique de f .

Démonstration. Si x_0 est un maximum local, il existe alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap]a, b[$, on a donc $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et, comme $x - x_0 < 0$, on obtient :

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Pour tout $x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap]a, b[$, on a toujours $f(x) - f(x_0) \leq 0$, mais cette fois-ci $x - x_0 > 0$, donc :

$$0 \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Ainsi, $f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$, donc $f'(x_0) = 0$.

Si x_0 est un minimum local, on peut refaire le même raisonnement en inversant les bonnes inégalités. Sinon, on peut aussi remarquer que $-f$ admet un maximum local en x_0 et appliquer ce qui précède : $(-f)'(x_0) = 0$, donc $f'(x_0) = 0$. ■

Remarque 2.4.9. La réciproque est fausse : ce n'est pas parce qu'un point est critique qu'il est un extremum. Par exemple, 0 est un point critique de $x \mapsto x^3$ qui n'admet aucun extremum (local ou global).

2.4.2 Étude de points critiques

Proposition 2.4.10. Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soit $x_0 \in]a, b[$ un point critique de f . Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $a_n \neq 0$ et :

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = f(x_0) + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors :

- (i) si n est pair et $a_n > 0$, alors x_0 est un minimum local de f ;
- (ii) si n est pair et $a_n < 0$, alors x_0 est un maximum local de f ;
- (iii) si n est impair, x_0 n'est pas un extremum de f .

Démonstration. On commence par se donner $\varepsilon:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ telle que :

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = f(x_0) + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

- (i) Supposons n pair et $a_n > 0$. Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad |\varepsilon(x)| \leq \frac{a_n}{2}.$$

Ainsi, pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) = (x - x_0)^n (a_n + \varepsilon(x)) \\ &\geq (x - x_0)^n \left(a_n - \frac{a_n}{2} \right) = (x - x_0)^n \frac{a_n}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

car n est pair, donc $(x - x_0)^n \geq 0$.

- (ii) Supposons n pair et $a_n < 0$. On trouve encore $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad |\varepsilon(x)| \leq -\frac{a_n}{2}.$$

Ainsi, pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) = (x - x_0)^n (a_n + \varepsilon(x)) \\ &\leq (x - x_0)^n \left(a_n - \frac{a_n}{2} \right) = (x - x_0)^n \frac{a_n}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

car n est pair, donc $(x - x_0)^n \geq 0$.

- (iii) Supposons n impair. Commençons par supposer $a_n > 0$. Toujours par hypothèse sur ε , on trouve $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap]a, b[, \quad |\varepsilon(x)| \leq \frac{a_n}{2}.$$

Pour $x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap]a, b[$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0)^n \frac{a_n}{2} > 0$$

car $x - x_0 > 0$, donc $(x - x_0)^n > 0$. Cependant, pour $x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap]a, b[$, on a :

$$f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)^n \frac{a_n}{2} < 0$$

car $(x - x_0)^n < 0$.

Le cas $a_n < 0$ se traite de la même façon : les inégalités s'inversent, de la même façon que pour le cas n pair et $a_n < 0$ par rapport au cas n pair et $a_n > 0$. ■

Remarque 2.4.11. Dans le développement limité énoncé dans ce résultat, il n'y a pas de terme d'ordre 1. La raison est « cachée » dans les hypothèses : comme x_0 est un point critique, $f'(x_0) = 0$ par définition, et c'est justement le coefficient d'ordre 1 du développement limité de f en x_0 .

Exemple 2.4.12. On peut considérer la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{1+x^4}$ qui admet 0 et $\pm\sqrt[4]{3}$ comme points critiques. En 0, la fonction n'admet aucun extremum. En $\sqrt[4]{3}$, on a affaire à un maximum (global), tandis qu'en $-\sqrt[4]{3}$, c'est un minimum (global). Ces comportements sont illustrés dans la [Figure 2.3](#).

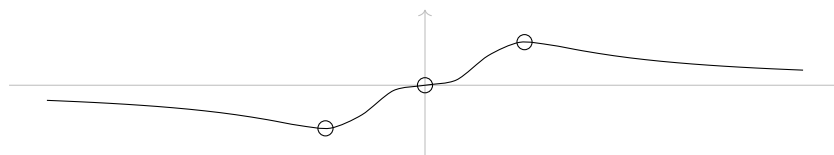


FIGURE 2.3 – La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{1+x^4}$ admet trois points critiques : 0 et $\pm\sqrt[4]{3}$, et les trois cas se présentent.

Corollaire 2.4.13. Soient $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $a_n \neq 0$ et :

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Alors :

- (i) la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est la tangente à la courbe représentative de f en x_0 ;
- (ii) si n est pair et $a_n > 0$, alors la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en x_0 , pour des points suffisamment proches de x_0 ;
- (iii) si n est pair et $a_n < 0$, alors la courbe représentative de f est au-dessous de sa tangente en x_0 , pour des points suffisamment proches de x_0 ;
- (iv) si n est impair, la courbe représentative de f « traverse » sa tangente en x_0 (on dit que x_0 est un point d'inflexion).

Démonstration. Pour le premier point, on se souvient du [Lemme 2.1.6](#) ainsi que du [Lemme 2.1.7](#) : $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$. Les autres points s'obtiennent en appliquant la [Proposition 2.4.10](#) à la fonction

$$\tilde{f}: x \mapsto f(x) - a_0 - a_1(x - x_0).$$

■

Remarque 2.4.14. Dans cette preuve, on rappelle que $a_1 = f'(x_0)$, et on propose d'utiliser la [Proposition 2.4.10](#) qui demande que la fonction soit dérivable... ce qui ne fait pas partie des hypothèses de ce résultat. Ou plutôt, pas directement. On suppose l'existence d'un développement limité à un ordre supérieur à 1 : autrement dit, f est dérivable en x_0 , et c'est finalement tout ce dont on a besoin.

Exemple 2.4.15. La fonction $x \mapsto x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$ permet d'observer les trois comportements. En $x_0 = 0$, on obtient $n = 2$ avec $a_n < 0$: la tangente est au-dessus de la courbe. En $x_0 = 1$, on obtient $n = 3$: la tangente traverse la courbe. En $x_0 = 2$, on obtient à nouveau $n = 2$, mais $a_n > 0$: la tangente est au-dessous de la courbe. Ces comportements sont illustrés dans la [Figure 2.4](#).

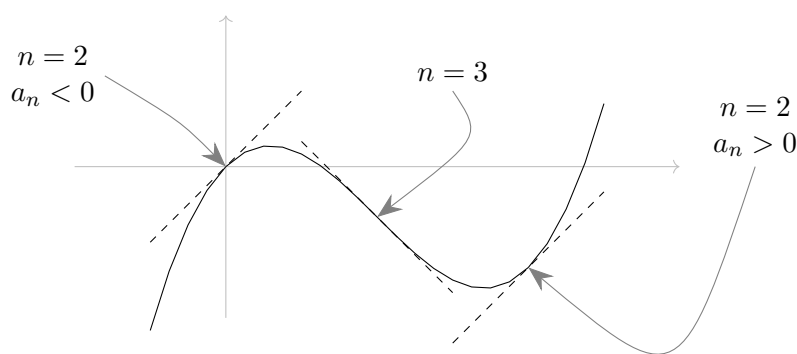


FIGURE 2.4 – La fonction $x \mapsto x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$ change de convexité.

Exercice 2.10

Solution page 56.

Soit $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$. On définit la fonction

$$f: x \mapsto b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3.$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3.$$

Donner l'expression de a_0 , a_1 , a_2 et a_3 .

2. Retrouver les comportements décrits dans l'Exemple 2.4.15.

2.5 Indications pour les exercices

Indications pour l'Exercice 2.1

1. On peut au choix développer ou procéder par récurrence.
2. Utiliser le résultat précédent pour obtenir, pour $x \neq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1-x},$$

et conclure.

3. On peut recommencer, ou utiliser un changement de variable.

Indications pour l'Exercice 2.2

1. C'est direct avec la définition. On pensera tout de même à vérifier la continuité en 0 de f .
2. C'est direct sur $\mathbb{R}^*$. En 0, on pourra s'intéresser au taux d'accroissement, ou à un résultat du cours.
3. Si f' admet un développement limité en 0, alors elle est continue en 0. A-t-on la continuité de f' en 0?

Indications pour l'Exercice 2.3

On connaît le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Connaît-on une primitive de cette même fonction?

2.6 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 2.1

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1}$$

en développant. Un changement d'indice donne :

$$\sum_{k=0}^n x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k.$$

Ainsi :

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 + \sum_{k=1}^n x^k - \sum_{k=1}^n x^k - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}.$$

2. De ce qui précède, on déduit, pour $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} (1 - x^{n+1}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \varepsilon(x),$$

où

$$\varepsilon: x \mapsto \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

3. On pose

$$y := -x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Alors :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^n y^k + y^n \varepsilon(y),$$

par ce qui précède. On remplace alors y par $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + x^n \tilde{\varepsilon}(x),$$

où $\tilde{\varepsilon}: x \mapsto (-1)^n \varepsilon(-x)$.

Solution de l'Exercice 2.2

1. Commençons par vérifier que f est continue en 0 (sinon, ça ne sert à rien de continuer).
Pour $x \neq 0$, on peut écrire :

$$|f(x) - 1| = \left| x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| + |x|^2 + |x|^3 \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|}_{\leq 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or :

$$|\varepsilon(x)| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc on a obtenu le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.

2. Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable comme somme, produit et composition de fonctions dérivables. En 0, on vient de montrer que f admet un développement limité d'ordre 2. En particulier, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en ce point.
3. Commençons par déterminer l'expression de la dérivée de f en dehors de 0. Pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En 0, on peut une nouvelle fois utiliser le développement limité : on « lit » la valeur de $f'(0)$ dans le coefficient d'ordre 1. Ici, $f'(0) = 1$.

Vérifions si f' est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) - f'(0) = 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On a déjà :

$$\left| 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq 2|x| + 3|x|^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

La partie en cosinus n'a cependant aucune chance de tendre vers 0. Considérons par exemple la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n := \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = \cos(2n\pi) = 1.$$

Ainsi :

$$f'(x_n) - f'(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \neq 0,$$

donc f' n'est pas continue en 0, et donc n'admet aucun développement limité en 0.

Solution de l'Exercice 2.3

On a déjà déterminé :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Or, $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On peut alors appliquer la Proposition 2.1.9 :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^{n+1} \tilde{\varepsilon}(x),$$

avec $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Comme $\ln(1) = 0$, on obtient le développement limité voulu (en tronquant le précédent pour récupérer l'ordre n) :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n \bar{\varepsilon}(x).$$

Solution de l'Exercice 2.4

1. Comme la fonction exponentielle est continue en 0 avec $\exp(0) = 1$, on a directement :

$$\exp(x) = 1 + \varepsilon_0(x)$$

avec $\varepsilon_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

2. On applique la Proposition 2.1.9 : une primitive de la fonction exponentielle est elle-même, donc

$$\exp(x) = 1 + x + x\varepsilon_1(x)$$

avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

3. En continuant d'appliquer la Proposition 2.1.9, on finit par remarquer :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon_n(x)$$

avec $\varepsilon_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

4. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est déjà faite. Pour l'hérédité, on suppose que la formule est vraie, et on applique la Proposition 2.1.9.

Solution de l'Exercice 2.5

1. La fonction sinus est continue en 0 avec $\sin(0) = 0$, donc :

$$\sin(x) = \varepsilon_0^s(x)$$

avec $\varepsilon_0^s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. De même, la fonction cosinus est continue en 0 avec $\cos(0) = 1$, donc :

$$\cos(x) = 1 + \varepsilon_0^c(x)$$

avec $\varepsilon_0^c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

2. Comme sin est une primitive de cos, on applique la Proposition 2.1.9 au développement limité de cos :

$$\sin(x) = x + x\varepsilon_1^s(x)$$

avec $\varepsilon_1^s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. De manière similaire, $-\cos$ est une primitive de sin donc, en appliquant la Proposition 2.1.9 au développement limité de sin, on obtient dans un premier temps :

$$-\cos(x) = -1 + x\varepsilon_1^c(x)$$

avec $\varepsilon_1^c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On en déduit :

$$\cos(x) = 1 + x\varepsilon_1^c(x)$$

avec $\varepsilon_1^c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

3. On montre les deux formules simultanément :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon_n^s(x), \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon_n^c(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_n^s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon_n^c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Pour cela, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est faite et, pour l'hérédité, il suffit d'appliquer la Proposition 2.1.9.

Solution de l'Exercice 2.6

Soit $x \in]-a, a[$, pour un certain $a > 0$. On va utiliser la formule de Taylor-Young :

$$\tan(x) = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3).$$

Il reste à calculer les valeurs des dérivées de la tangente en 0. Partons de la définition :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On dérive :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Deux choix s'offrent à nous pour simplifier : utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$, ou séparer la fraction. On choisit la deuxième option, car réutiliser la fonction tangente semble plus pratique dans notre cas :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

On continue :

$$\tan''(x) = 2 \tan'(x) \tan(x).$$

Et une dernière fois :

$$\tan^{(3)}(x) = 2 \tan''(x) \tan(x) + 2 \tan'(x)^2.$$

On a déjà $\tan(0) = 0$. On en déduit :

$$\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1 + 0 = 1.$$

On continue alors :

$$\tan''(0) = 2 \times 1 \times 0 = 0.$$

Et encore : $\tan^{(3)}(0) = 2$. On obtient ainsi :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Solution de l'Exercice 2.7

Soit $x > 0$. Comme la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable, en particulier, on peut appliquer Taylor-Lagrange pour trouver $c_x \in]0, x[$ tel que :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{c_x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Ainsi :

$$\frac{e^x}{x^n} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k-n}}{k!} + \frac{e^{c_x}}{(n+1)!} x.$$

Comme $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{k-n}}{k!} > 0.$$

De plus, $c_x > 0$, donc $e^{c_x} > e^0 = 1$. Combinons ces deux remarques :

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{e^{c_x}}{(n+1)!} x > \frac{1}{(n+1)!} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où le résultat.

Solution de l'Exercice 2.8

Commençons par remarquer que $f^{(4)}$ est bornée, en tant que fonction continue sur un intervalle fermé borné. Soit $h > 0$ suffisamment petit pour que $x+h \in [a, b]$ et $x-h \in [a, b]$. On peut appliquer le corollaire de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4), \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

On somme ces deux égalités :

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4),$$

et on obtient le résultat en divisant par h^2 .

Solution de l'Exercice 2.9

On peut commencer par remarquer que, si $n = 0$, le résultat est trivial. Supposons $n \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!} (x-s)^{n-1} ds.$$

On conclut directement en utilisant l'hypothèse : comme $f^{(n)}$ est identiquement nulle, l'intégrale est nulle, donc l'expression de f est réduite à la partie régulière, donc polynomiale.

Solution de l'Exercice 2.10

1. Une première idée consiste à développer cette nouvelle expression, puis à identifier avec l'expression originale de f . Sinon, on peut tout simplement faire appel aux formules de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3.$$

2. Dans l'Exemple 2.4.15, on a la fonction

$$f: x \mapsto x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$

- Pour $x_0 = 0$, il n'y a rien à faire : on a déjà le développement où on peut voir que le premier coefficient non nul (après le coefficient d'ordre 1) est $a_2 = -2 < 0$.
- Pour $x_0 = 1$, on peut calculer :

$$f(x_0) = -\frac{1}{3}, \quad f'(x_0) = -1, \quad f''(x_0) = 0, \quad f^{(3)}(x_0) = 4,$$

d'où $n = 3$, qui est impair.

— Pour $x_0 = 2$, on calcule :

$$f(x_0) = -\frac{2}{3}, \quad f'(x_0) = 1, \quad f''(x_0) = 4, \quad f^{(3)}(x_0) = 4,$$

d'où, là encore, $n = 2$, mais $a_2 = 2 > 0$.

Chapitre 3

Espaces vectoriels

3.1 $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Définition 3.1.1. Soit E un ensemble muni de deux lois (opérations) :

— une loi de composition interne, appelée addition :

$$\begin{aligned}\boxplus: E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u \boxplus v ;\end{aligned}$$

— une loi de composition externe, appelée multiplication par un réel :

$$\begin{aligned}\boxdot: \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \boxdot u.\end{aligned}$$

On dit que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel si l'addition satisfait les axiomes :

1. $\forall (u, v) \in E \times E, u \boxplus v = v \boxplus u$ (commutativité de l'addition) ;
2. $\forall (u, v, w) \in E \times E \times E, (u \boxplus v) \boxplus w = u \boxplus (v \boxplus w)$ (associativité de l'addition) ;
3. il existe un élément neutre pour l'addition, noté 0_E , tel que :

$$\forall u \in E, \quad u \boxplus 0_E = u ;$$

4. tout élément $u \in E$ admet un opposé (aussi appelé symétrique) $u' \in E$ tel que :

$$u \boxplus u' = 0_E ;$$

et si la multiplication par un réel satisfait les axiomes :

5. $\forall u \in E, 1 \boxtimes u = u$;
6. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \boxtimes (\mu \boxtimes u) = (\lambda \mu) \boxtimes u$ (associativité de la multiplication) ;
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E \times E, \lambda \boxtimes (u \boxplus v) = (\lambda \boxtimes u) \boxplus (\lambda \boxtimes v)$ (distributivité) ;
8. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall u \in E, (\lambda \boxplus \mu) \boxtimes u = (\lambda \boxtimes u) \boxplus (\mu \boxtimes u)$.

Dans ce cas, $\mathbb{R}$ est appelé le corps des scalaires. Un réel est donc également appelé scalaire. Tout élément de E est appelé vecteur.

Remarque 3.1.2. Un espace vectoriel est nécessairement non vide, puisqu'il contient l'élément neutre 0_E .

On peut d'ores-et-déjà citer quelques exemples d'ensembles dont on peut vérifier aisément qu'il s'agit d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) ; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}\},$$

muni de l'addition

$$(x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et de la multiplication par un réel

$$\lambda \boxtimes (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. La commutativité est une conséquence de la commutativité de l'addition réelle :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \dots, y_n) \boxplus (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

2. Il en va de même pour l'associativité :

$$\begin{aligned} ((x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n)) \boxplus (z_1, \dots, z_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \boxplus (z_1, \dots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \boxplus ((y_1, \dots, y_n) \boxplus (z_1, \dots, z_n)). \end{aligned}$$

3. L'élément neutre est le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n} := (0, \dots, 0)$:

$$(x_1, \dots, x_n) \boxplus (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n).$$

4. L'opposé de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$:

$$(x_1, \dots, x_n) \boxplus (-x_1, \dots, -x_n) = (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, \dots, 0).$$

5. $1 \boxtimes (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

6.

$$\begin{aligned} \lambda \boxtimes (\mu \boxtimes (x_1, \dots, x_n)) &= \lambda \boxtimes (\mu x_1, \dots, \mu x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda\mu) \boxtimes (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \lambda \boxtimes ((x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n)) &= \lambda \boxtimes (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \boxplus (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\ &= (\lambda \boxtimes (x_1, \dots, x_n)) \boxplus (\lambda \boxtimes (y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \boxtimes (x_1, \dots, x_n) &= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \boxplus (\mu x_1, \dots, \mu x_n) \\ &= (\lambda \boxtimes (x_1, \dots, x_n)) \boxplus (\mu \boxtimes (x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.4. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, muni de l'addition classique et de la multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (son élément neutre est $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$).

Exemple 3.1.5. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de l'addition

$$(u, v) \mapsto u \boxplus v,$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \boxplus v)_n := u_n + v_n,$$

et de la multiplication par un réel

$$(\lambda, u) \mapsto \lambda \boxtimes u,$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda \boxtimes u)_n := \lambda u_n,$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la suite nulle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})_n = 0.$$

Exemple 3.1.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$\mathcal{F}(I; \mathbb{R}) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R}\},$$

muni de l'addition

$$(f \boxplus g): x \mapsto f(x) + g(x)$$

et de la multiplication par un réel

$$(\lambda \boxtimes f): x \mapsto \lambda f(x),$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Son élément neutre est la fonction identiquement nulle :

$$0_{\mathcal{F}(I; \mathbb{R})}: x \mapsto 0.$$

Exemple 3.1.7. L'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}[X]$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 3.1

[Solution page 90.](#)

Soit X un ensemble. Soit

$$\mathcal{F}(X; E) := \{f: X \rightarrow E\}$$

l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On munit cet ensemble de l'addition :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X; E) \times \mathcal{F}(X; E), \quad (f \boxplus g): x \mapsto f(x) + g(x),$$

ainsi que de la multiplication par un réel :

$$\forall (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(X; E), \quad (\lambda \boxtimes f): x \mapsto \lambda \cdot f(x).$$

Montrer que $(\mathcal{F}(X; E), \boxplus, \boxtimes)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Maintenant que nous avons compris que l'addition au sens vectoriel et l'addition réelle étaient deux opérations distinctes, nous allons laisser tomber la notation « $\boxplus$ » au profit de la plus classique « $+$ » pour désigner l'addition entre deux vecteurs. De même, on utilisera « $\cdot$ » au lieu de « $\boxtimes$ » pour désigner la multiplication par un scalaire. On pourra aussi

s'autoriser à tout simplement ne mettre aucun symbole pour cette opération (comme on le fait pour les réels dans certains cas). Il reste néanmoins important de faire la distinction entre le monde des réels et le monde des vecteurs, mais le contexte suffit en général à distinguer les opérations : le plus souvent, il est clair que nous voulons additionner deux vecteurs ou deux réels.

Proposition 3.1.8. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Alors E admet un unique élément neutre, et tout vecteur admet un unique symétrique.

Démonstration. L'existence d'un élément neutre et d'un symétrique est donné par la définition.

Unicité de l'élément neutre. Soient $0_E \in E$ et $\tilde{0}_E \in E$ deux éléments neutres. Alors :

$$\tilde{0}_E = \tilde{0}_E + 0_E = 0_E + \tilde{0}_E = 0_E,$$

où on a utilisé successivement le fait que 0_E est neutre, que l'addition est commutative, et que $\tilde{0}_E$ est neutre.

Unicité du symétrique. Soit $u \in E$. Soient $u_1 \in E$ et $u_2 \in E$ deux symétriques de u . Alors :

$$u_1 = u_1 + 0_E = u_1 + (u + u_2) = (u_1 + u) + u_2 = 0_E + u_2 = u_2,$$

où on a utilisé successivement le fait que 0_E est l'élément neutre, que u_2 est un symétrique de u , que l'addition est associative, que u_1 est un symétrique, et encore une fois que 0_E est neutre. ■

Proposition 3.1.9. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $0 \cdot u = 0_E$;
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$;
3. $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u ;
4. $\lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E).$

Démonstration. 1. On note v le symétrique de $0 \cdot u$. Alors :

$$0_E = 0 \cdot u + v.$$

Or :

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u.$$

Ainsi :

$$0_E = (0 \cdot u + 0 \cdot u) + v = 0 \cdot u + (0 \cdot u + v) = 0 \cdot u + 0_E = 0 \cdot u.$$

2. On note v le symétrique de $\lambda \cdot 0_E$. Alors :

$$0_E = \lambda \cdot 0_E + v.$$

Or :

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E.$$

Ainsi :

$$0_E = (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + v = \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + v) = \lambda \cdot 0_E + 0_E = \lambda \cdot 0_E.$$

3. C'est une conséquence directe des axiomes et du premier point :

$$u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E.$$

4. Si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$, alors $\lambda \cdot u = 0_E$ par les deux premiers points. Supposons $\lambda \cdot u = 0_E$. Si $\lambda = 0$, on a fini. On suppose alors que $\lambda \neq 0$. Le deuxième point permet ainsi d'écrire :

$$0_E = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E.$$

On utilise alors quelques axiomes de la définition et le fait que $0_E = \lambda \cdot u$:

$$0_E = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \left(\frac{1}{\lambda} \lambda \right) \cdot u = 1 \cdot u = u.$$

■

Notation 3.1.10. On note $-u$ le symétrique d'un vecteur u , et on note :

$$u - v := u + (-v).$$

3.2 Sous-espace vectoriel

Dans tout ce qui suit, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 3.2.1. Soit F un sous-ensemble de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \neq \emptyset$;
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall (u, v) \in F \times F, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).

Exemple 3.2.2. L'ensemble

$$\Delta := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1. Le vecteur neutre $(0, 0)$ est dans Δ .
2. Soient $(x, x) \in \Delta$, $(y, y) \in \Delta$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda \cdot (x, x) + \mu(y, y) = (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \in \Delta.$$

Proposition 3.2.3. Soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E \in F$;
2. $\forall (u, v) \in F \times F, u + v \in F$;
3. $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F, \lambda \cdot u \in F$.

Démonstration. Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E .

1. Comme $F \neq \emptyset$, on trouve $u \in F$. On utilise alors le deuxième point de la [Définition 3.2.1](#) : $0 \cdot u + 0 \cdot u \in F$. Or, par la [Proposition 3.1.9](#), $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0_E + 0_E = 0_E$, donc $0_E \in F$.
2. Soit $(u, v) \in F \times F$. Alors, en utilisant le deuxième point de la [Définition 3.2.1](#) :

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in F.$$

3. Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$. Comme $0_E \in F$, on peut écrire :

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_E = \lambda \cdot u + 0 \cdot u \in F,$$

toujours en conséquence du deuxième point de la [Définition 3.2.1](#).

Supposons que les assertions soient vraies.

1. Comme $0_E \in F$, en particulier, $F \neq \emptyset$.
2. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(u, v) \in F \times F$. Par la troisième assertion, $\lambda \cdot u \in F$ et $\mu \cdot v \in F$. Ainsi, par la deuxième assertion, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E . ■

Exemple 3.2.4. L'ensemble

$$F := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Le vecteur neutre $(0, 0, 0)$ est dans F car :

$$0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0.$$

2. Soient $(x_1, x_2, x_3) \in F$ et $(y_1, y_2, y_3) \in F$. Alors :

$$(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 + 0 = 0,$$

donc $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in F$.

3. Soient $(x_1, x_2, x_3) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda x_1 + 2(\lambda x_2) - 4(\lambda x_3) = \lambda(x_1 + 2x_2 - 4x_3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

donc $\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) \in F$.

Exemple 3.2.5. L'ensemble

$$F := \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. La suite nulle tend vers 0, donc appartient à F .
2. Soient $(u, v) \in F \times F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)_n = \lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Remarque 3.2.6. L'ensemble

$$F := \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Déjà, il ne contient pas la suite nulle. De plus, pour u et v dans F :

$$(u + v)_n = u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + 1 = 2 \neq 1,$$

et encore de plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot 1 = \lambda \neq 1$$

si $\lambda \neq 1$. Rien ne va !

Exercice 3.2

[Solution page 90.](#)

Soit F un sous-ensemble de E . Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E \in F$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in F \times F, \lambda \cdot u + v \in F$.

Théorème 3.2.7. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est un espace vectoriel.

Démonstration. On vérifie que F satisfait les axiomes de la Définition 3.1.1. Globalement, l'idée est toujours la même : on revient à E qui est un espace vectoriel et dont les éléments vérifient les axiomes. Par exemple, soit $(u, v) \in F \times F$. En particulier, $(u, v) \in E \times E$. Comme E est un espace vectoriel :

$$u + v = v + u,$$

d'où la commutativité conservée dans F . L'associativité est obtenue de la même façon.

Par la Proposition 3.2.3, on sait que $0_E \in F$. On obtient alors facilement que $0_F = 0_E$.

Toujours par la Proposition 3.2.3, si $u \in F$, alors $(-1) \cdot u \in F$, donc le symétrique de u reste dans F .

Les autres axiomes s'obtiennent en « remontant » à E comme on l'a déjà fait. ■

Comme il est beaucoup plus commode de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel plutôt qu'un espace vectoriel, en pratique, on préfère montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel que l'on connaît déjà, lorsque c'est possible.

Remarque 3.2.8. L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , mais pas $\emptyset$.

Remarque 3.2.9. L'espace tout entier E est un sous-espace vectoriel de lui-même.

Exercice 3.3

[Solution page 90.](#)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $F_1 := \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(1) = 0\}$;
2. $F_2 := \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(0) = P'(0)\}$;
3. $F_3 := \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; u \text{ est majorée}\}$;
4. $F_4 := \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$;
5. $F_5 := \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$;
6. $F_6 := \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; f' = f\}$;
7. $F_7 := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; \forall x \in F, f(x) = f(-x)\}$.

Proposition 3.2.10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . Plus généralement, soit $\mathcal{E}$ un ensemble de sous-espaces vectoriels de E (c'est-à-dire que, pour tout $F \in \mathcal{E}$, F est un sous-espace vectoriel de E). Alors

$$\bigcap_{F \in \mathcal{E}} F$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. On traite le cas général : le cas de deux sous-espaces en est une conséquence directe (avec $\mathcal{E} = \{F, G\}$).

Pour tout $F \in \mathcal{E}$, $0_E \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel de E . Ainsi :

$$0_E \in \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F.$$

Soient $(u, v) \in \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $F \in \mathcal{E}$, $u \in F$ et $v \in F$, donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$, donc :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F,$$

ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 3.2.11. Soit $A \subset E$. On note

$$\mathcal{E}_A := \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E ; A \subset F\}.$$

Alors $\mathcal{E}_A$ est non vide, et

$$F_A := \bigcap_{F \in \mathcal{E}_A} F$$

est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A .

De plus, A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A = F_A$.

Démonstration. Comme E est un sous-espace vectoriel de E , $E \in \mathcal{E}_A$, donc $\mathcal{E}_A \neq \emptyset$.

La Proposition 3.2.10 implique que F_A est un sous-espace vectoriel de E . Comme $A \subset F$ pour tout $F \in \mathcal{E}_A$, alors :

$$A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{E}_A} F = F_A.$$

Donc F_A est bien un sous-espace vectoriel de E contenant A . Il reste à montrer qu'il s'agit du plus petit. Soit pour cela $\tilde{F}$ un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset \tilde{F}$. Alors, par définition, $\tilde{F} \in \mathcal{E}_A$. Soit $x \in F_A$. Alors, pour tout $F \in \mathcal{E}_A$, $x \in F$. En particulier, $x \in \tilde{F}$. Ainsi $F_A \subset \tilde{F}$.

Si $A = F_A$, alors A est un sous-espace vectoriel de E , puisque F_A en est un.

Supposons que A soit un sous-espace vectoriel de E . Comme $A \subset A$, $A \in \mathcal{E}_A$, donc $F_A \subset A$. Or, on a déjà montré que $A \subset F_A$, donc on obtient $A = F_A$. ■

Remarque 3.2.12. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est, en général, pas un sous-espace vectoriel. Par exemple, les ensembles

$$F_1 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$(1, 0) \in F_1 \subset F_1 \cup F_2 \quad \text{et} \quad (0, 1) \in F_2 \subset F_1 \cup F_2.$$

Cependant, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$ car $(1, 1) \notin F_1$ et $(1, 1) \notin F_2$.

Proposition 3.2.13. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff (F \subset G \text{ ou } G \subset F).$$

Démonstration. **D'une part**, si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de E . De la même façon, si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Réciproquement, procédons par contraposée. Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Autrement dit, il existe $u \in F$ tel que $u \notin G$ et il existe $v \in G$ tel que $v \notin F$. Comme $u \in F$, $u \in F \cup G$. De même, $v \in F \cup G$. On note $w := u + v$. Alors $v = w - u$. Comme $v \notin F$, on en déduit que $w \notin F$ ou $-u \notin F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, on a nécessairement $-u \in F$, donc $w \notin F$. De la même manière, on montre que $w \notin G$. Ainsi, $w \notin F \cup G$, donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E . ■

Remarque 3.2.14. Cette preuve pourrait faire penser à un raisonnement par l'absurde, mais il n'en est rien : nous avons simplement utilisé la contraposée d'une condition. Une condition pour qu'un ensemble F soit un sous-espace vectoriel est :

$$(u \in F \text{ et } v \in F) \implies u + v \in F.$$

La contraposée se lit :

$$u + v \notin F \implies (u \notin F \text{ ou } v \notin F),$$

ce qui est bien ce qu'on a utilisé.

Définition 3.2.15. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de F et G , et on note $F + G$, l'ensemble

$$F + G := \{u + v \in E ; u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

Proposition 3.2.16. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. On peut toujours écrire :

$$0_E = 0_E + 0_E,$$

que l'on peut voir comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G puisque ce sont tous deux des sous-espaces vectoriels de E et contiennent donc 0_E .

Soient $(u, v) \in (F + G) \times (F + G)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par définition, il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ et $(v_1, v_2) \in F \times G$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + \mu \cdot v &= \lambda \cdot (u_1 + u_2) + \mu \cdot (v_1 + v_2) \\ &= \lambda \cdot u_1 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \\ &= \underbrace{(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2)}_{\in G} \in F + G. \end{aligned}$$

■

Exercice 3.4[Solution page 92.](#)

Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que

$$F + G = G + F.$$

2. Montrer que

$$(F + G) + H = F + (G + H).$$

Remarque 3.2.17. Par définition, tout élément de $F + G$ se décompose en la somme d'un élément de F et d'un élément de G . Autrement dit :

$$\forall u \in F + G, \exists (u_F, u_G) \in F \times G / u = u_F + u_G.$$

Cependant, cette décomposition n'est pas nécessairement unique. On peut s'en convaincre avec les deux ensembles suivants :

$$F := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\},$$

qui sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Prenons par exemple $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$u = (1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) \in F + G,$$

donc on peut décomposer u en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Mais on a aussi :

$$u = (1, 1, 1) = (0, 1, 0) + (1, 0, 1) \in F + G,$$

qui est une autre décomposition en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , ce qui montre bien que la décomposition n'est pas toujours unique. Le « problème » est ici que $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$: on règle cela avec la prochaine définition.

Définition 3.2.18. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. On dit alors que la somme $F + G$ est directe, et on la note $F \oplus G$.

Exemple 3.2.19. Les ensembles

$$F := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ en somme directe : on vérifie facilement que $F \cap G = \{(0, 0)\}$.

Proposition 3.2.20. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La somme $F + G$ est directe.
- (ii) $\forall (u_1, u_2) \in F \times G, (u_1 + u_2 = 0_E \implies u_1 = u_2 = 0_E)$.
- (iii) $\forall u \in F + G, \exists! (u_1, u_2) \in F \times G / u = u_1 + u_2$.

Démonstration. (iii) $\implies$ (ii). Soit $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u_1 + u_2 = 0_E$. On peut toujours écrire

$$0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}.$$

Or, comme (iii) est vraie, cette décomposition est unique, donc $u_1 = 0_E$ et $u_2 = 0_E$.

(ii) $\implies$ (i). Soit $u \in F \cap G$. En particulier, $u \in G$ qui est un espace vectoriel, donc $-u \in G$. Or :

$$0_E = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{(-u)}_{\in G},$$

donc, comme (ii) est vraie, $u = 0_E$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$.

(i) $\implies$ (iii). Soit $u \in F + G$. Alors il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$. Soit $(v_1, v_2) \in F \times G$ tel que $u = v_1 + v_2$. Alors :

$$u_1 + u_2 = u = v_1 + v_2,$$

d'où :

$$\underbrace{u_1 - v_1}_{\in F} = \underbrace{v_2 - u_2}_{\in G} \in F \cap G = \{0_E\},$$

donc $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = 0_E$, et ainsi $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. ■

Remarque 3.2.21. On pourrait se demander si la relation « être en somme directe » est transitive. Autrement dit, pour trois sous-espaces vectoriels F , G et H de E , si on suppose que F et G sont en somme directe, et que G et H sont en somme directe, a-t-on que F et H sont en somme directe ? La réponse est non en général. Considérons par exemple

$$F := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}, \quad H := \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 ; z \in \mathbb{R}\},$$

et :

$$G := \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 ; y \in \mathbb{R}\}.$$

On peut montrer que F , G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. De plus, F et G sont en somme directe, de même que G et H . Cependant, F et H ne sont pas en somme directe : on a ici $H \subset F$, donc $F \cap H = H$.

Définition 3.2.22. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si :

1. F et G sont en somme directe,
2. $F \oplus G = E$.

Définition 3.2.23. On reprend

$$F := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$$

dont on a déjà dit qu'ils étaient en somme directe. On obtient rapidement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) \in F + G,$$

donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

Proposition 3.2.24. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists ! (u_F, u_G) \in F \times G / u = u_F + u_G.$$

Démonstration. C'est une autre façon d'écrire (i) $\iff$ (iii) dans la Proposition 3.2.20, puisqu'ici $F + G = E$. ■

Exemple 3.2.25. Les ensembles

$$F := \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G := \{P \in \mathbb{R}[X] ; \deg(P) \leq 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$P = P - P(0) + P(0).$$

Or, $P - P(0) \in F$ et $P(0) \in G$, donc $F + G = \mathbb{R}[X]$. À noter que, si cette décomposition peut paraître quelque peu artificielle au premier abord, elle revient simplement à écrire :

$$\sum_{k=0}^d a_k X^k = \sum_{k=1}^d a_k X^k + a_0.$$

2. Soit $P \in F \cap G$. En particulier, $P \in G$, donc $\deg(P) \leq 0$: il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $P \equiv c$. De plus, $P \in F$, donc $0 = P(0) = c$. On en déduit que P est le polynôme nul. Ainsi, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, donc $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

Remarque 3.2.26. Tout comme on a vu que la relation « être en somme directe » n'est pas transitive, la relation « être supplémentaire » ne l'est pas non plus. Considérons par exemple

$$G := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\},$$

un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on peut montrer qu'il est supplémentaire des deux sous-espaces suivants :

$$F := \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 ; z \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad H := \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 ; z \in \mathbb{R}\}.$$

Cependant, même si ici F et H sont en somme directe, ils ne sont pas supplémentaires : on a par exemple $(1, 0, 0) \notin F + H$.

3.3 Famille de vecteurs

On rappelle que E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 3.3.1. Soit I un ensemble. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E si

$$\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$$

avec :

$$\forall i \in I, \quad v_i \in E.$$

Exemple 3.3.2. — La collection

$$\underbrace{((1, 0, 0))}_{v_1}, \underbrace{((0, 1, 0))}_{v_2}, \underbrace{((1, 1, 1))}_{v_3}, \underbrace{((1, 0, 1))}_{v_4} = (v_i)_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$$

est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ contenant quatre éléments.

— La collection

$$\underbrace{((1, 0, 0))}_{v_1}, \underbrace{((0, 1, 0))}_{v_2}, \underbrace{((1, 1, 1))}_{v_3}, \underbrace{((1, 0, 1))}_{v_4}, \underbrace{((1, 0, 1))}_{v_5} = (v_i)_{i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket}$$

est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ contenant cinq éléments.

— La collection

$$(1, X, X^2, X^3, \dots) = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ contenant une infinité dénombrable d'éléments.

— La collection

$$(x \mapsto \cos(\alpha x))_{\alpha \in [0,1]}$$

est une famille de vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ contenant une infinité indénombrable d'éléments.

Remarque 3.3.3. Une famille de vecteurs peut contenir plusieurs fois le même vecteur.

Notation 3.3.4. On choisit de noter une famille constituée d'un seul vecteur comme un singleton :

$$\{v\} := (v_i)_{i \in I}$$

si I est un ensemble de cardinal égal à 1.

Définition 3.3.5. Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ tout vecteur de E s'écrivant

$$\lambda_1 \cdot v_{i_1} + \dots + \lambda_n \cdot v_{i_n} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_{i_k}$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$, avec :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i_k \in I \quad \text{et} \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

On note $\text{vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Convention 3.3.6. Une somme vide correspond au vecteur nul. Autrement dit, pour $n = 0$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_{i_k} = \sum_{k=1}^0 \lambda_k \cdot v_{i_k} := 0_E.$$

Proposition 3.3.7. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Alors $\text{vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Si $\mathcal{F} = \emptyset$, alors $\text{vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}$ par la [Convention 3.3.6](#), donc il n'y a rien à démontrer. Supposons alors $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Montrons que $\text{vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .

Comme $\mathcal{F} \neq \emptyset$, il existe $v \in \mathcal{F}$. Alors $0 \cdot v = 0_E$ est une combinaison linéaire (à un élément) de vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $0_E \in \text{vect}(\mathcal{F})$.

Soit $(u, v) \in \text{vect}(\mathcal{F}) \times \text{vect}(\mathcal{F})$. On peut écrire :

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_{n_u} \cdot u_{n_u} \quad \text{et} \quad v = \mu_1 \cdot v_1 + \dots + \mu_{n_v} \cdot v_{n_v}$$

avec $n_u \in \mathbb{N}$, $n_v \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n_u \rrbracket, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, u_k \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n_v \rrbracket, \quad \mu_k \in \mathbb{R}, v_k \in \mathcal{F}.$$

Alors :

$$u + v = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_{n_u} \cdot u_{n_u} + \mu_1 \cdot v_1 + \dots + \mu_{n_v} \cdot v_{n_v} \in \text{vect}(\mathcal{F}).$$

Soient $u \in \text{vect}(\mathcal{F})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire :

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, u_k \in \mathcal{F}.$$

Alors :

$$\lambda \cdot u = (\lambda \lambda_1) \cdot u_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) \cdot u_n \in \text{vect}(\mathcal{F}).$$

Montrons que c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$.

On note

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}} := \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E ; \forall v \in \mathcal{F}, v \in F\}.$$

Par le [Corollaire 3.2.11](#), on sait alors que

$$G_{\mathcal{F}} := \bigcap_{F \in \mathcal{E}_{\mathcal{F}}} F$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs de $\mathcal{F}$. Ainsi, $G_{\mathcal{F}} \subset \text{vect}(\mathcal{F})$.

Soit $u \in \text{vect}(\mathcal{F})$. On écrit

$$u = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, u_k \in \mathcal{F}.$$

Par définition de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$:

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_k \in G_{\mathcal{F}}.$$

Comme $G_{\mathcal{F}}$ est un espace vectoriel, $\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n \in G_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire $u \in G_{\mathcal{F}}$. Ainsi $\text{vect}(\mathcal{F}) \subset G_{\mathcal{F}}$, d'où $\text{vect}(\mathcal{F}) = G_{\mathcal{F}}$. ■

Définition 3.3.8. Soit $u \in E$, $u \neq 0_E$. On appelle droite vectorielle de vecteur directeur u le sous-espace vectoriel de E :

$$\text{vect}(\{u\}).$$

Définition 3.3.9. Soient $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et G un sous-espace vectoriel de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de G si $\text{vect}(\mathcal{F}) = G$. Dans ce cas, on pourra également dire que G est engendré par la famille $\mathcal{F}$.

Remarque 3.3.10. Lorsque le sous-espace vectoriel n'est pas précisé, il est sous-entendu qu'il s'agit de l'espace entier : on dit que $\mathcal{F}$ est génératrice si $\text{vect}(\mathcal{F}) = E$.

Exemple 3.3.11. La famille

$$\mathcal{F} := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$$

est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire :

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1).$$

Exemple 3.3.12. La famille

$$\mathcal{F} := (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

est génératrice de $\mathbb{R}[X]$. En effet, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où $n := \deg(P)$, tel que :

$$P(x) = a_0 \cdot X^0 + a_1 \cdot X^1 + \dots + a_n \cdot X^n.$$

Définition 3.3.13. Soit $\mathcal{F} := (v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que c'est une famille libre si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i_1, \dots, i_n \in I \text{ deux à deux différents,}$$

$$(\lambda_1 \cdot v_{i_1} + \dots + \lambda_n \cdot v_{i_n} = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0).$$

On dit alors que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants.

Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée. Dans ce cas, les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dits linéairement dépendants.

Remarque 3.3.14. Dans la [Définition 3.3.13](#), le n est quelconque. L'idée est de « piocher » n'importe quelle combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Convention 3.3.15. La famille $\emptyset$ est libre.

Exemple 3.3.16. On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathcal{F}_1 := (X, X - 1).$$

Alors $\mathcal{F}_1$ est libre. En effet, considérons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lambda \cdot X + \mu \cdot (X - 1) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Alors $P := (\lambda + \mu)X - \mu = 0_{\mathbb{R}[X]}$. En particulier :

$$0_{\mathbb{R}[X]} = P' = \lambda + \mu,$$

d'où l'on déduit que :

$$0_{\mathbb{R}[X]} = P = -\mu.$$

Donc $\mu = 0$, et $\lambda = -\mu = 0$.

Cependant, la famille

$$\mathcal{F}_2 := (X, X - 1, X + 1)$$

est liée :

$$(-2) \cdot X + 1 \cdot (X - 1) + 1 \cdot (X + 1) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Exercice 3.5

[Solution page 92.](#)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de $\mathbb{R}[X]$ telle que $0_{\mathbb{R}[x]} \notin \mathcal{F}$, ne contenant pas deux fois le même vecteur, et satisfaisant :

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \quad \deg(P) = \deg(Q) \implies P = Q.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 3.6

[Solution page 93.](#)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_d)$$

une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E . Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot v_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

Proposition 3.3.17. Soient $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ deux familles de vecteurs de E .

- (i) La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{vect}(\mathcal{F})$.
- (ii) Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E , et si $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est génératrice de E .
- (iii) Si $\mathcal{F}$ est liée, et si $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est liée.
- (iv) Si $\mathcal{F}$ est libre, et si $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est libre.
- (v) Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Soit $v \in \mathcal{F}$. Supposons $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \setminus \{v\}$. Si $v \in \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}})$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est génératrice.

- (vi) Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $v \in E$. Si $v \notin \text{vect}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est libre.

Démonstration. (i) C'est une autre façon d'écrire la définition.

- (ii) Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice de E , tout vecteur de $\tilde{\mathcal{F}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $\tilde{\mathcal{F}}$ est aussi génératrice de E .
- (iii) Supposons que $\mathcal{F}$ est liée. Il existe alors $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{F}^n$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k = 0_E.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_k \in \mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$, donc il s'agit également d'une famille de vecteurs de $\tilde{\mathcal{F}}$ liée, donc $\tilde{\mathcal{F}}$ est liée.

- (iv) Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soient $(v_1, \dots, v_n) \in \tilde{\mathcal{F}}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k = 0_E.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_k \in \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, donc il s'agit également d'une combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ qui est libre, ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = 0,$$

donc $\tilde{\mathcal{F}}$ est libre.

- (v) Supposons que $v \in \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}})$. Alors il existe $(v_1, \dots, v_n) \in \tilde{\mathcal{F}}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k.$$

Soit $u \in E$. Comme $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \cup \{v\}$ est génératrice, il existe $(u_1, \dots, u_p) \in \tilde{\mathcal{F}}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p, \mu) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que :

$$u = \sum_{k=1}^p \mu_k \cdot u_k + \mu \cdot v = \sum_{k=1}^p \mu_k \cdot u_k + \sum_{k=1}^n (\mu \lambda_k) \cdot v_k \in \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Donc $E \subset \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}})$, donc $\text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}) = E$.

- (vi) Soient $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{F}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k + \lambda \cdot v = 0_E,$$

c'est-à-dire :

$$(-\lambda) \cdot v = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k.$$

Dans le cas $\lambda \neq 0$, on a alors

$$v = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda} \right) \cdot v_k \in \text{vect}(\mathcal{F}),$$

ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc $\lambda = 0$ et ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k = 0_E.$$

Comme $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k = 0,$$

donc la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est libre. ■

Proposition 3.3.18. Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Démonstration. On considère n'importe quelle combinaison linéaire nulle impliquant le vecteur nul 0_E . On peut toujours utiliser un coefficient non nul devant celui-ci et toujours obtenir une somme nulle, puisque :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.3.19. Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est liée si et seulement si :

$$\exists v \in \mathcal{F} / v \in \text{vect}(\mathcal{F} \setminus \{v\}).$$

Démonstration. Dans un premier temps, supposons que $\mathcal{F}$ est liée. On trouve alors $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{F}^n$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k = 0_E.$$

Comme il existe au moins un coefficient non nul, quitte à renuméroter, on peut toujours supposer que $\lambda_n \neq 0$. Ainsi :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_n} \right) \cdot v_k \in \text{vect}(\mathcal{F} \setminus \{v_n\}).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $v \in \mathcal{F}$ tel que $v \in \text{vect}(\mathcal{F} \setminus \{v\})$. Alors on trouve $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathcal{F} \setminus \{v\})^n$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k.$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k + (-1) \cdot v = 0_E,$$

donc $\mathcal{F}$ est liée. ■

Lemme 3.3.20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs. Si $\tilde{\mathcal{F}}$ est une famille constituée d'au moins $n + 1$ vecteurs de $\text{vect}(\mathcal{F})$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est liée.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il est suffisant de considérer le cas où $\text{card}(\tilde{\mathcal{F}}) = n + 1$: le fait que toute famille plus grande soit liée est une conséquence directe.

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Considérons le cas $n = 0$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille contenant zéro vecteur : $\mathcal{F} = \emptyset$. Dans ce cas, $\text{vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}$. Alors toute famille $\tilde{\mathcal{F}}$ utilisant des vecteurs de $\text{vect}(\mathcal{F})$ ne peut que contenir le vecteur nul, et est donc liée (voir la [Proposition 3.3.18](#)).

Supposons que le résultat est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de $n + 1$ vecteurs, et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ une famille de $n + 2$ vecteurs de $\text{vect}(\mathcal{F})$. On note

$$\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}} := (w_1, \dots, w_{n+1}, w_{n+2}).$$

Si $w_{n+2} = 0_E$, alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est liée (voir la [Proposition 3.3.18](#)). Supposons alors $w_{n+2} \neq 0_E$. Alors $w_{n+2} \in \text{vect}(\mathcal{F}) \setminus \{0_E\}$, donc il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$w_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \cdot v_k.$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ainsi :

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \right) \cdot v_k + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \cdot w_{n+2}.$$

Autrement dit, $v_{n+1} \in \text{vect}((v_1, \dots, v_n, w_{n+2}))$, ce qui signifie :

$$\text{vect}((v_1, \dots, v_n, v_{n+1})) = \text{vect}((v_1, \dots, v_n, w_{n+2})).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, par définition, $w_i \in \text{vect}(\mathcal{F}) = \text{vect}((v_1, \dots, v_n, v_{n+1}))$. On déduit alors de ce qui précède que $w_i \in \text{vect}((v_1, \dots, v_n, w_{n+2}))$, ce que l'on écrit :

$$w_i = \sum_{k=1}^n \mu_{i,k} \cdot v_k + \mu_{i,n+1} \cdot w_{n+2}.$$

On définit maintenant :

$$h_i := w_i - \mu_{i,n+1} \cdot w_{n+2} = \sum_{k=1}^n \mu_{i,k} \cdot v_k \in \text{vect}((v_1, \dots, v_n)).$$

La famille $(h_1, \dots, h_{n+1})$ ainsi construite contient donc $n + 1$ vecteurs issus d'un espace engendré par n vecteurs. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que cette famille est liée. Autrement dit, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \cdot h_k = 0_E.$$

En revenant à la définition de ces vecteurs, on obtient alors :

$$0_E = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \cdot (w_k - \mu_{k,n+1} \cdot w_{n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \cdot w_k + \left(\sum_{k=1}^{n+1} -\alpha_k \mu_{k,n+1} \right) \cdot w_{n+2},$$

d'où l'on déduit que $\tilde{\mathcal{F}} = (w_1, \dots, w_{n+2})$ est liée. ■

Définition 3.3.21. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E si :

- $\mathcal{F}$ est libre,
- $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Exercice 3.7

[Solution page 94.](#)

Montrer que

1. la famille

$$\mathcal{F} := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. la famille

$$\mathcal{P} := (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

est une base de $\mathbb{R}[X]$.

3.4 Espace vectoriel de dimension finie

On rappelle que E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 3.4.1. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 3.4.2. — L'espace $\mathbb{C}$ est de dimension finie car $\mathbb{C} = \text{vect}((1, i))$.

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie car engendré par la famille :

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)).$$

— Pour $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie car :

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{vect}((X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}).$$

Remarque 3.4.3. Attention, l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Proposition 3.4.4. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs. Alors il existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{B}$ est une base de $\text{vect}(\mathcal{F})$.

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} := \{\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} ; \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}) = \text{vect}(\mathcal{F})\}.$$

On peut déjà remarquer que $\mathcal{F} \in \mathcal{E}$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus, pour toute $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}$, $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, donc $0 \leq \text{card}(\tilde{\mathcal{F}}) \leq \text{card}(\mathcal{F})$. Ainsi :

$$\{\text{card}(\tilde{\mathcal{F}}) ; \tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}\} \subset \llbracket 0, \text{card}(\mathcal{F}) \rrbracket,$$

et on peut alors définir :

$$d := \min\{\text{card}(\tilde{\mathcal{F}}) ; \tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}\},$$

et il existe $\tilde{\mathcal{F}}_d \in \mathcal{E}$ tel que $\text{card}(\tilde{\mathcal{F}}_d) = d$.

Montrons que $\tilde{\mathcal{F}}_d$ est libre. Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $\tilde{\mathcal{F}}_d$ est liée et, par la [Proposition 3.3.19](#), il existe $v_d \in \tilde{\mathcal{F}}_d$ tel que $v_d \in \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}_d \setminus \{v_d\})$. Autrement dit, $\text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}_d \setminus \{v_d\}) = \text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}_d)$. Or, par définition de $\mathcal{E}$, $\text{vect}(\tilde{\mathcal{F}}_d) = \text{vect}(\mathcal{F})$. Ainsi, $\tilde{\mathcal{F}}_d \setminus \{v_d\} \in \mathcal{E}$, avec $\text{card}(\tilde{\mathcal{F}}_d \setminus \{v_d\}) = \text{card}(\tilde{\mathcal{F}}_d) - 1 = d - 1$, ce qui contredit la minimalité de d .

Ainsi, $\tilde{\mathcal{F}}_d$ est libre. Par définition de $\mathcal{E}$, elle est aussi génératrice de $\text{vect}(\mathcal{F})$. Il s'agit donc d'une base de cet espace. ■

Corollaire 3.4.5. Supposons que E est de dimension finie. Alors E admet une base finie.

Démonstration. Par définition, E admet une famille génératrice finie. On applique alors la [Proposition 3.4.4](#) : on trouve dans cette famille une base de E , qui est donc finie. ■

Théorème 3.4.6. Supposons que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_d)$ une famille de vecteurs de E . Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d / u = \sum_{k=1}^d \lambda_k \cdot e_k.$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E . En particulier, elle est génératrice, donc $\text{vect}(\mathcal{B}) = E$, ce qui garantit l'existence de cette décomposition.

Soit $u \in E$. On écrit :

$$u = \sum_{k=1}^d \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^d \mu_k \cdot e_k.$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^d (\lambda_k - \mu_k) \cdot e_k = 0_E.$$

Or, $\mathcal{B}$ est une base, donc c'est une famille libre. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda_k - \mu_k = 0,$$

et on obtient ainsi l'unicité.

Réciproquement, supposons que tout vecteur de E admet une décomposition unique selon la famille $\mathcal{B}$. En particulier, $\text{vect}(\mathcal{B}) = E$ et $\mathcal{B}$ est donc génératrice. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot e_i = 0_E.$$

Comme on peut toujours écrire

$$0_E = \sum_{i=1}^d 0 \cdot e_i,$$

on déduit de l'unicité de la décomposition que :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda_i = 0,$$

et ainsi $\mathcal{B}$ est libre, et est donc une base. ■

Définition 3.4.7. Dans le [Théorème 3.4.6](#), les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont appelés coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 3.4.8. Supposons que E soit de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On note

$$N := \text{card}(\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad N' := \text{card}(\mathcal{B}').$$

Comme E admet une famille génératrice finie, on a nécessairement $N \in \mathbb{N}$ et $N' \in \mathbb{N}$.

Comme $\mathcal{B}'$ est une famille de vecteurs de E , en particulier, $\mathcal{B}' \subset \text{vect}(\mathcal{B}) = E$. Or, $\mathcal{B}'$ est libre donc, par le [Lemme 3.3.20](#), on en déduit $N' \leq N$. De même, en échangeant les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dans le raisonnement précédent, on obtient $N \leq N'$. D'où $N = N'$. ■

Définition 3.4.9. Supposons que E soit de dimension finie. Le cardinal d'une base de E est appelé dimension de l'espace E et est noté $\dim(E)$.

Remarque 3.4.10. Le résultat précédent garantit que l'entier $\dim(E)$ ne dépend pas de la base choisie.

Remarque 3.4.11. Si E est de dimension infinie, on note $\dim(E) = +\infty$.

Exercice 3.8

[Solution page 95.](#)

Soit

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - y + z = 0\}.$$

Montrer que P est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer sa dimension.

Proposition 3.4.12. Supposons que E soit de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . Alors :

- (i) $\mathcal{F}$ est libre $\implies \text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$;
- (ii) $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E) \implies \mathcal{F}$ est liée ;
- (iii) $\mathcal{F}$ est génératrice $\implies \text{card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.

Démonstration. (i) C'est encore une conséquence du [Lemme 3.3.20](#). Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Comme $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{F} \subset \text{vect}(\mathcal{B}) = E$, alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.

(ii) C'est la contraposée du premier point que l'on vient de démontrer.

(iii) Supposons que $\mathcal{F}$ est génératrice. Si $\text{card}(\mathcal{F}) = +\infty$, alors $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$ car la dimension est finie. Supposons $\text{card}(\mathcal{F}) < +\infty$. De la [Proposition 3.4.4](#), on déduit l'existence de $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{B}$ est une base de $\text{vect}(\mathcal{F}) = E$, donc $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$. Or, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, donc $\text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{F})$ et le résultat s'ensuit. ■

Théorème 3.4.13. Supposons que E soit de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E . Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) La famille $\mathcal{B}$ est une base de E .

- (ii) La famille $\mathcal{B}$ est génératrice et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
- (iii) La famille $\mathcal{B}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.

Démonstration. Par définition, (i) implique (ii) et (iii).

(ii) $\implies$ (i). Supposons que $\mathcal{B}$ n'est pas libre. Alors (Proposition 3.3.19) on trouve $v \in \mathcal{B}$ tel que $v \in \text{vect}(\mathcal{B} \setminus \{v\})$. Autrement dit, $\text{vect}(\mathcal{B} \setminus \{v\}) = \text{vect}(\mathcal{B}) = E$, donc $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ est génératrice, avec $\text{card}(\mathcal{B} \setminus \{v\}) = \text{card}(\mathcal{B}) - 1 = \dim(E) - 1$, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base.

(iii) $\implies$ (i). Soit $v \in E$. Si $v = 0_E$, alors $v \in \text{vect}(\mathcal{B})$. Sinon, la famille $\mathcal{B} \cup \{v\}$ est liée (si $v \in \mathcal{B}$, c'est trivial, et sinon $\text{card}(\mathcal{B} \cup \{v\}) = \text{card}(\mathcal{B}) + 1 = \dim(E) + 1$). En écrivant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$, on trouve alors des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \mu$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^d \lambda_k \cdot e_k + \mu \cdot v = 0_E.$$

On peut remarquer que $\mu \neq 0$. En effet, si $\mu = 0$, l'égalité ci-dessus implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre, ce qui est impossible puisque les réels considérés ne sont pas tous nuls. On peut donc écrire :

$$v = \sum_{k=1}^d \left(-\frac{\lambda_k}{\mu} \right) \cdot e_k \in \text{vect}(\mathcal{B}),$$

donc $\text{vect}(\mathcal{B}) = E$. ■

Exemple 3.4.14. La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Par ailleurs :

$$\lambda \cdot (1, 1) + \mu \cdot (1, 0) = (0, 0) \iff \lambda = \mu = 0,$$

donc la famille $((1, 1), (1, 0))$ est libre et contient deux éléments : il s'agit donc aussi d'une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.9

[Solution page 96.](#)

1. Montrer que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $P_0, \dots, P_n$ des polynômes tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg(P_k) = k.$$

Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 3.4.15. Supposons que E soit de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} := \{\mathcal{F} \text{ famille libre de } F\}.$$

On peut déjà remarquer que $\emptyset \in \mathcal{E}$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus, pour toute famille $\mathcal{F} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ est libre dans F , et donc en particulier dans E . Ainsi $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$. On en déduit que

$$\{\text{card}(\mathcal{F}) ; \mathcal{F} \in \mathcal{E}\} \subset \llbracket 0, \dim(E) \rrbracket,$$

donc on peut définir

$$d := \max\{\text{card}(\mathcal{F}) ; \mathcal{F} \in \mathcal{E}\} \leq \dim(E),$$

et on trouve $\mathcal{F}_d \in \mathcal{E}$ tel que $\text{card}(\mathcal{F}_d) = d$.

Supposons que $\mathcal{F}_d$ ne soit pas génératrice de F . Alors il existe $v \in F$ tel que $v \notin \text{vect}(\mathcal{F}_d)$. Ainsi, $\mathcal{F}_d \cup \{v\}$ est libre, donc $\mathcal{F}_d \cup \{v\} \in \mathcal{E}$ avec $\text{card}(\mathcal{F}_d \cup \{v\}) = \text{card}(\mathcal{F}_d) + 1 = d + 1$, ce qui contredit la maximalité de d . Donc $\mathcal{F}_d$ est génératrice de F . Par définition de $\mathcal{E}$, elle est également libre. C'est donc une base de F et on a obtenu :

$$\dim(F) = \text{card}(\mathcal{F}_d) = d \leq \dim(E).$$

■

Corollaire 3.4.16. Supposons que E soit de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$F = E \iff \dim(F) = \dim(E).$$

Démonstration. Le sens direct est évident. Supposons que $\dim(F) = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F . C'est une famille libre dans E avec $\dim(F) = \dim(E)$ vecteurs, donc c'est aussi une base de E , donc $F = \text{vect}(\mathcal{B}) = E$. ■

Proposition 3.4.17. Supposons que E soit de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Démonstration. On note

$$d_F := \dim(F), \quad d_G := \dim(G), \quad d_E := \dim(E).$$

Soient $(v_1, \dots, v_{d_F})$ une base de F et $(u_1, \dots, u_{d_G})$ une base de G .

Soit $u \in E$. Comme $E = F \oplus G$, il existe un unique couple $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Comme $u_F \in F$ et $u_G \in G$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d_F}) \in \mathbb{R}^{d_F}$ et un unique $(\mu_1, \dots, \mu_{d_G}) \in \mathbb{R}^{d_G}$ tels que

$$u_F = \sum_{k=1}^{d_G} \lambda_k \cdot v_k \quad \text{et} \quad u_G = \sum_{k=1}^{d_F} \mu_k \cdot u_k.$$

On obtient ainsi une représentation de u :

$$u = \sum_{k=1}^{d_G} \lambda_k \cdot v_k + \sum_{k=1}^{d_F} \mu_k \cdot u_k,$$

qui est unique dans la famille $(v_1, \dots, v_{d_F}, u_1, \dots, u_{d_G})$. Cette famille est donc génératrice de E (existence de la décomposition) et libre (unicité des coordonnées). C'est donc une base de E qui contient $d_F + d_G$ vecteurs, d'où le résultat. ■

Lemme 3.4.18. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $v \in E \setminus F$. Alors :

$$F + \text{vect}(\{v\}) = F \oplus \text{vect}(\{v\}).$$

Démonstration. Soit $u \in F \cap \text{vect}(\{v\})$. En particulier, $u \in \text{vect}(\{v\})$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \cdot v$. Si $\lambda \neq 0$, on peut alors écrire :

$$v = \frac{1}{\lambda} \cdot u \in F,$$

ce qui n'est pas possible par hypothèse sur v . Ainsi, $\lambda = 0$ et $u = 0_E$, donc $F \cap \text{vect}(\{v\}) = \{0_E\}$. ■

Proposition 3.4.19. Supposons que E soit de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet un supplémentaire dans E .

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} := \{G \text{ sous-espace vectoriel de } E ; G \cap F = \{0_E\}\}.$$

On peut déjà remarquer que $\{0_E\} \in \mathcal{E}$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus, pour tout sous-espace vectoriel G de E , $E + F$ est un sous-espace vectoriel de E , donc est de dimension finie avec $\dim(G + F) \leq \dim(E)$. Ainsi :

$$\{\dim(G + F) ; G \in \mathcal{E}\} \subset \llbracket 0, \dim(E) \rrbracket$$

et on peut définir

$$m := \max\{\dim(G + F) ; G \in \mathcal{E}\}.$$

Soit $G_m \in \mathcal{E}$ tel que $\dim(G_m + F) = m$.

Supposons que $G_m + F \neq E$. Alors il existe $v \in E$ tel que $v \notin G_m + F$. Soit $\tilde{G}_m := G_m + \text{vect}(\{v\})$. Du [Lemme 3.4.18](#), on déduit alors :

$$\tilde{G}_m + F = G_m + \text{vect}(\{v\}) + F = (G_m + F) + \text{vect}(\{v\}) = (G_m + F) \oplus \text{vect}(\{v\}).$$

Ainsi, de la [Proposition 3.4.17](#), on obtient :

$$\dim(\tilde{G}_m + F) = \dim(G_m + F) + \dim(\text{vect}(\{v\})) = m + 1.$$

Soit maintenant $u \in \tilde{G}_m \cap F$. Comme $u \in \tilde{G}_m = G_m + \text{vect}(\{v\})$, il existe $w \in G_m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u = w + \lambda \cdot v$. De plus, $u \in F$, donc $u - w \in F + G_m$. Or, $u - w = \lambda \cdot v \in \text{vect}(\{v\})$. Ainsi :

$$u - w \in (F + G_m) \cap \text{vect}(\{v\}) = \{0_E\}.$$

On en déduit

$$u = w \in F \cap G_m = \{0_E\},$$

donc $u = 0$ et ainsi $\tilde{G}_m \cap F = \{0_E\}$. Autrement dit, $\tilde{G}_m \in \mathcal{E}$, ce qui contredit la maximalité de m .

Donc $G_m + F = E$. Comme, par définition de $\mathcal{E}$, $G_m \cap F = \{0_E\}$, on a donc obtenu $G_m \oplus F = E$. ■

Corollaire 3.4.20 (Formule de Grassmann). Supposons que E soit de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Démonstration. Comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de G , de la [Proposition 3.4.19](#), on en déduit qu'il admet un supplémentaire dans G , que l'on note H :

$$H \oplus (F \cap G) = G,$$

avec de plus

$$\dim(H) + \dim(F \cap G) = \dim(G).$$

Soit $u \in F + G$. Alors il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Comme $u_G \in G = H \oplus (F \cap G)$, il existe $(u_H, \tilde{u}) \in H \times (F \cap G)$ tel que $u_G = u_H + \tilde{u}$. Ainsi :

$$u = u_F + (u_H + \tilde{u}) = (u_F + \tilde{u}) + u_H \in F + H$$

car $\tilde{u} \in F \cap G \subset F$. On en déduit $F + G \subset F + H$. Or, $H \subset G$, donc $F + H \subset F + G$, et ainsi $F + G = F + H$.

Soit $v \in F \cap H$. En particulier, $v \in H \subset G$, donc $v \in H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ car H et $F \cap G$ sont supplémentaires. Ainsi $v = 0_E$ et $F \cap H = \{0_E\}$.

On a ainsi obtenu $F \oplus H = F + G$, d'où :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 3.4.21. Supposons que E soit de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $F \oplus G = E$.
- (ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- (iii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration. Les implications (i) $\implies$ (ii) et (i) $\implies$ (iii) sont des conséquences directes de la formule du Corollaire 3.4.20.

(ii) $\implies$ (i). On part de la formule du Corollaire 3.4.20 :

$$\dim(F + G) = \underbrace{\dim(F) + \dim(G)}_{=\dim(E)} + \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim(E).$$

Le Corollaire 3.4.16 implique alors que $F + G = E$, donc $F \oplus G = E$.

(iii) $\implies$ (i). Toujours la même formule :

$$\dim(F \cap G) = \underbrace{\dim(F + G)}_{=\dim(E)} - \underbrace{(\dim(F) + \dim(G))}_{=\dim(E)} = 0,$$

donc $F \cap G = \{0_E\}$ et ainsi $F \oplus G = E$. ■

Exercice 3.10

[Solution page 96.](#)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que H est supplémentaire de F et de G simultanément.

Proposition 3.4.22. Supposons que E soit de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset (\mathcal{G} \cup \mathcal{L}).$$

Démonstration. Soit

$$\mathcal{E} := \{\mathcal{F} \text{ libre} ; \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset (\mathcal{G} \cup \mathcal{L})\}.$$

On peut remarquer que $\mathcal{L} \in \mathcal{E}$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus :

$$\{\dim(\text{vect}(\mathcal{F})) ; \mathcal{F} \in \mathcal{E}\} \subset \llbracket 0, \dim(E) \rrbracket,$$

donc on peut définir

$$m := \max\{\dim(\text{vect}(\mathcal{F})) ; \mathcal{F} \in \mathcal{E}\} \leq \dim(E)$$

et on trouve $\mathcal{F}_m \in \mathcal{E}$ tel que $\dim(\text{vect}(\mathcal{F}_m)) = m$.

Supposons que $m < \dim(E)$. Alors il existe $g \in \mathcal{G}$ tel que $g \notin \text{vect}(\mathcal{F}_m)$ puisque $\mathcal{G}$ est génératrice de E . Du [Lemme 3.4.18](#), on déduit alors :

$$\text{vect}(\mathcal{F}_m) + \text{vect}(\{g\}) = \text{vect}(\mathcal{F}_m) \oplus \text{vect}(\{g\}).$$

En particulier, $\dim(\text{vect}(\mathcal{F}_m \cup \{g\})) = \dim(\text{vect}(\mathcal{F}_m)) + 1 = m + 1$. Or, $\mathcal{F}_m \cup \{g\} \in \mathcal{E}$, ce qui contredit la maximalité de m . Ainsi, $m = \dim(E)$.

On a donc obtenu une famille $\mathcal{F}_m$ libre dans E contenant $m = \dim(E)$ vecteurs : c'est donc une base, et les inclusions sont données par la définition de $\mathcal{E}$. ■

Théorème 3.4.23 (Base incomplète). Supposons que E soit de dimension finie.

1. Pour toute famille $\mathcal{L}$ libre dans E , il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.
2. Pour toute famille $\mathcal{G}$ génératrice de E , il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration. 1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre dans E . Comme E est de dimension finie, il existe une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E . La [Proposition 3.4.22](#) donne alors l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset (\mathcal{G} \cup \mathcal{L})$, et donc en particulier $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.

2. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Comme la famille $\mathcal{L} := \emptyset$ est libre, la [Proposition 3.4.22](#) donne l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset (\mathcal{G} \cup \mathcal{L})$. En particulier, $\mathcal{B} \subset (\mathcal{G} \cup \emptyset) = \mathcal{G}$. ■

Une manière d'interpréter le [Théorème 3.4.23](#) est qu'il est toujours possible :

- d'ajouter des vecteurs à une famille libre,
- de retirer des vecteurs d'une famille génératrice,

jusqu'à obtenir une base de l'espace, si celui-ci est de dimension finie.

Exemple 3.4.24. La famille

$$\underbrace{((1, 1, 1))}_{v_1}, \underbrace{((-1, 1, 1))}_{v_2}, \underbrace{((-2, 2, 2))}_{v_3}, \underbrace{((1, 1, 3))}_{v_4}$$

est liée dans $\mathbb{R}^3$ (puisque'elle contient quatre vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3). On peut remarquer que

$$v_3 = 2v_2.$$

En retirant v_3 , on obtient une base de l'espace :

$$((1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 3)).$$

3.5 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 3.1

Les points de la Définition 3.1.1 sont vérifiés, un à un, en utilisant le fait que E est lui-même un espace vectoriel. Par exemple, pour la commutativité, on se donne f et g dans $\mathcal{F}(X; E)$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$(f \boxplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

par définition. Or, comme E est un espace vectoriel, l'addition commute :

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x),$$

et on obtient alors :

$$(f \boxplus g)(x) = g(x) + f(x) = (g \boxplus f)(x),$$

d'où $f \boxplus g = g \boxplus f$. Il faut faire le même raisonnement pour tous les autres points. L'élément neutre de cet espace n'est autre que la fonction identiquement nulle :

$$0_{\mathcal{F}(X; E)} : x \mapsto 0_E.$$

Solution de l'Exercice 3.2

Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E .

1. Comme dans la preuve de la Proposition 3.2.3, on montre facilement que $0_E \in F$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in F \times F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, $\lambda \cdot u \in F$, donc $\lambda \cdot u + v \in F$.

Supposons que les assertions soient vraies.

1. Comme $0_E \in F$, en particulier, $F \neq \emptyset$.
2. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(u, v) \in F \times F$. On utilise une première fois cette deuxième manière d'écrire la stabilité pour obtenir :

$$\mu \cdot v = \mu \cdot v + 0_E \in F.$$

On peut alors l'utiliser une seconde fois pour obtenir :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Solution de l'Exercice 3.3

1. Le polynôme nul est dans F_1 .

Soient $(P, Q) \in F_1 \times F_1$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

donc $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F_1$.

Ainsi, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et est donc un espace vectoriel.

2. Le polynôme nul est dans F_2 .

Soient $(P, Q) \in F_2 \times F_2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

et :

$$(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(0) = \lambda P'(0) + \mu Q'(0) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

donc $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F_2$.

Ainsi, F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et est donc un espace vectoriel.

3. La suite nulle est dans F_3 .

Soient $(u, v) \in F_3 \times F_3$. Alors il existe $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq U \quad \text{et} \quad v_n \leq V.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(u + v)_n = u_n + v_n \leq U + V,$$

donc $u + v \in F_3$.

Soient $u \in F_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $U > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq U.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n \leq |\lambda u_n| = |\lambda| \cdot |u_n| \leq |\lambda| \cdot U,$$

donc $\lambda \cdot u \in F_3$.

Ainsi, F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et est donc un espace vectoriel.

4. La fonction nulle est continue. Toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue. Ainsi, F_4 est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et est donc un espace vectoriel.
5. La fonction nulle est bien dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue, et toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable. Ainsi, F_5 est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et est donc un espace vectoriel.
6. La dérivée de la fonction nulle est elle-même, donc $0 \in F_6$.

Soient $(f, g) \in F_6 \times F_6$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g' = \lambda \cdot f + \mu \cdot g,$$

donc $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in F_6$.

Ainsi, F_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et est donc un espace vectoriel.

7. La fonction nulle est paire, donc $0 \in F_7$.

Soient $(f, g) \in F_7 \times F_7$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x),$$

donc $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in F_7$.

Ainsi, F_7 est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et est donc un espace vectoriel.

Solution de l'Exercice 3.4

1. Soit $u \in F + G$. Il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Comme E est un espace vectoriel, l'addition commute et ainsi :

$$u = u_F + u_G = u_G + u_F \in G + F.$$

Ainsi, $F + G \subset G + F$. L'inclusion réciproque se démontre de la même façon.

2. Soit $u \in (F + G) + H$. Il existe $(u_F, u_G, u_H) \in F \times G \times H$ tel que $u = (u_F + u_G) + u_H$. On utilise l'associativité de l'addition dans E pour obtenir $u \in F + (G + H)$, d'où une première inclusion. L'inclusion réciproque peut être obtenue de la même façon.

Solution de l'Exercice 3.5

L'objectif est de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_i = 0_{\mathbb{R}[X]} \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0, \quad (H_{3.5}(n))$$

où les P_i sont des vecteurs de $\mathcal{F}$ deux à deux différents. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'éléments dans la combinaison linéaire considérée.

Initialisation. Soit $P \in \mathcal{F}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda \cdot P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Comme $\mathcal{F}$ ne contient pas le vecteur nul par hypothèse, en particulier, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. De la Proposition 3.1.9, on déduit que $\lambda = 0$, et ainsi $(H_{3.5}(1))$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(H_{3.5}(n))$ est vraie. Soient $P_1, \dots, P_{n+1}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$ différents deux à deux. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot P_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Par hypothèse sur $\mathcal{F}$, les P_i sont tous de degrés différents, et on en considère ici un nombre fini. Il existe donc un unique $i_{\max} \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que :

$$\deg(P_{i_{\max}}) = \max_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \deg(P_i).$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer (pour simplifier le propos) que $i_{\max} = n+1$. Ainsi :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_i}_{=: \tilde{P}} + \lambda_{n+1} \cdot P_{n+1} = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

avec $\deg(\tilde{P}) < \deg(P_{n+1}) =: d$. On écrit

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

avec $a_d \neq 0$. Ainsi :

$$\lambda_{n+1} \cdot P_{n+1} = \sum_{k=0}^d \lambda_{n+1} a_k X^k.$$

Comme $\deg(\tilde{P}) < d$, en dérivant d fois l'égalité précédente, on obtient :

$$0 = \lambda_{n+1} d! a_d.$$

Comme $a_d \neq 0$, on en déduit $\lambda_{n+1} = 0$ et il reste ainsi :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Or, $(H_{3.5}(n))$ est vraie, donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i = 0.$$

On a donc obtenu :

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \lambda_i = 0,$$

donc $(H_{3.5}(n+1))$ est vraie.

Solution de l'Exercice 3.6

Commençons par coller à la Définition 3.3.1 en écrivant

$$\mathcal{F} = (v_i)_{i \in I}, \quad \text{avec } I := \llbracket 1, d \rrbracket.$$

Supposons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot v_i = 0_E.$$

Pour $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on note $i_k := k$, de sorte que l'on obtient :

$$\sum_{k=1}^d \lambda_k \cdot v_{i_k} = 0_E.$$

On reconnaît alors la forme utilisée dans la Définition 3.3.13 : comme $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda_i = 0.$$

Réciproquement, on considère $i_1, \dots, i_n$ dans I , deux à deux différents, avec $n \in \mathbb{N}$. Quitte à les renuméroter, on peut toujours supposer :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq d.$$

Soit $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} \cdot v_{i_k} = 0_E.$$

Comme les indices sont deux à deux différents, on a nécessairement $n \leq d$. L'idée est alors de « compléter » cette famille d'indices pour reformer $I = \llbracket 1, d \rrbracket$ tout entier, en ajoutant de nouveaux λ_i nuls, de sorte à rajouter les vecteurs « manquants » dans la combinaison linéaire, sans en altérer la somme. Soit alors $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_d) \in \mathbb{R}^d$ défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \tilde{\lambda}_i := \begin{cases} \lambda_{i_k}, & \text{s'il existe } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } i = i_k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^d \tilde{\lambda}_i \cdot v_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} \cdot v_{i_k} = 0_E.$$

Par hypothèse, on trouve ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \tilde{\lambda}_i = 0.$$

En particulier :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_{i_k} = 0,$$

et ainsi $\mathcal{F}$ est libre.

Solution de l'Exercice 3.7

1. Soient des réels a, b et c tels que :

$$a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0).$$

Par définition :

$$a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1) = (a, b, c),$$

donc on obtient directement

$$a = b = c = 0$$

et ainsi la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Soit maintenant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors on peut écrire :

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1),$$

ce qui signifie que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En notant $d := \deg(P)$, il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

donc la famille $\mathcal{P}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Il faut maintenant montrer que cette famille est libre, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall 0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i X^{k_i} = 0_{\mathbb{R}[X]} \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0. \quad (H_{3.7}(n))$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Commençons par le cas $n = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda X^k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. En dérivant k fois cette égalité, on obtient $k! \lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$ et ainsi $(H_{3.7}(1))$ est vraie.

Supposons $(H_{3.7}(n))$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soient

$$0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1}$$

des entiers. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i X^{k_i} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

En dérivant k_{n+1} fois cette égalité, on obtient $k_{n+1}! \lambda_{n+1} = 0$, d'où $\lambda_{n+1} = 0$ et il reste ainsi :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i X^{k_i} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Comme $(H_{3.7}(n))$ est vraie, cela implique :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0,$$

et ainsi $(H_{3.7}(n+1))$ est vraie.

Solution de l'Exercice 3.8

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par définition, $2x - y + z = 0$, ce qui se réécrit :

$$z = y - 2x.$$

On écrit alors :

$$(x, y, z) = (x, y, y - 2x) = x \cdot (1, 0, -2) + y \cdot (0, 1, 1),$$

d'où :

$$P = \text{vect}(\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}).$$

En particulier, P est un espace vectoriel. Il est de dimension finie, car engendré par une famille finie de vecteurs. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lambda \cdot (1, 0, -2) + \mu \cdot (0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Autrement dit :

$$(\lambda, \mu, \mu - 2\lambda) = (0, 0, 0),$$

ce qui donne directement $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, la famille $\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ est libre. Comme elle est aussi génératrice de P , il s'agit d'une base de P , donc $\dim(P) = 2$.

Solution de l'Exercice 3.9

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

et ainsi la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m$ des entiers, pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i X^{k_i} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On dérive cette égalité k_m fois pour obtenir $\lambda_m = 0$, puis k_{m-1} fois pour obtenir $\lambda_{m-1} = 0$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \lambda_i = 0,$$

et ainsi la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre.

Comme $(1, X, \dots, X^n)$ est libre et génératrice, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la dimension est alors donnée par le nombre de vecteurs dans cette base : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

2. On montre que cette famille est libre de la même façon que pour la précédente. On obtient ainsi une famille libre à $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs : il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution de l'Exercice 3.10

Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , par la Proposition 3.4.19, il admet un supplémentaire dans E que l'on note H_0 . De même, $F \cap G$ admet un supplémentaire dans F que l'on note H_F , ainsi qu'un supplémentaire dans G que l'on note H_G .

Intersections nulles. Par définition :

$$H_F \cap (F \cap G) = \{0_E\} \quad \text{et} \quad H_G \cap (F \cap G) = \{0_E\}.$$

Mais on a également :

$$H_0 \cap (F \cap G) = \{0_E\}.$$

En effet, soit $u \in H \cap (F \cap G)$. Comme $u \in F \cap G$, en particulier, $u \in F + G$, donc $u \in H \cap (F + G) = \{0_E\}$.

On peut également ajouter :

$$H_F \cap H_G = \{0_E\}, \quad H_0 \cap H_F = \{0_E\}, \quad H_0 \cap H_G = \{0_E\}.$$

En effet, soit $u \in H_F \cap H_G$. Alors $u \in H_F \subset F$ et $u \in H_G \subset G$, donc $u \in H_F \cap (F \cap G) = \{0_E\}$. Pour la deuxième, soit $u \in H_0 \cap H_F$. Alors $u \in H_F \subset F \subset F + G$, donc $u \in H_0 \cap (F + G) = \{0_E\}$. La troisième intersection s'obtient de la même façon.

Des premiers supplémentaires. Avec ces trois espaces, on peut déjà construire des sous-espaces supplémentaires de F et de G . Cela ne répond pas à la question, mais c'est une première itération. Nous allons montrer que :

$$F \oplus (H_0 + H_G) = E \quad \text{et} \quad G \oplus (H_0 + H_F) = E.$$

Soit $u \in E = H_0 \oplus (F + G)$. Alors il existe $(u_0, u_S) \in H_0 \times (F + G)$ tel que $u = u_0 + u_S$. Comme $u_S \in F + G$, il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u_S = u_F + u_G$. On obtient :

$$u = u_0 + (u_F + u_G) = u_F + (u_0 + u_G).$$

On a presque une bonne décomposition, à ceci près que u_G vit dans G , mais pas forcément dans H_G . Cependant, $u_G \in G = H_G \oplus (F \cap G)$, donc on trouve $(\tilde{u}_G, u_{FG}) \in H_G \times (F \cap G)$ tel que $u_G = \tilde{u}_G + u_{FG}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= u_F + (u_0 + (\tilde{u}_G + u_{FG})) \\ &= \underbrace{(u_F)}_{\in F} + \underbrace{(u_{FG})}_{\in F \cap G \subset F} + \underbrace{(u_0)}_{\in H_0} + \underbrace{(\tilde{u}_G)}_{\in H_G} \in F + (H_0 + H_G). \end{aligned}$$

Ainsi, $F + (H_0 + H_G) = E$.

Remarquons maintenant que $H_0 + H_G = H_0 \oplus H_G$, donc (par la [Proposition 3.4.17](#)) $\dim(H_0 + H_G) = \dim(H_0) + \dim(H_G)$. Or, on rappelle que $H_0 \oplus (F + G) = E$, donc $\dim(H_0) = \dim(E) - \dim(F + G)$. De plus, $H_G \oplus (F \cap G) = G$, donc $\dim(H_G) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En combinant tout cela, on obtient :

$$\dim(F) + \dim(H_0 + H_G) = \dim(F) + \dim(E) - \dim(F + G) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

On peut alors utiliser le [Corollaire 3.4.20](#) pour simplifier beaucoup de termes. Il ne reste qu'en effet :

$$\dim(F) + \dim(H_0 + H_G) = \dim(E).$$

Il ne reste qu'à appliquer le [Corollaire 3.4.21](#) pour obtenir que

$$F \oplus (H_0 + H_G) = E.$$

Le cas de G se traite exactement de la même façon.

Une « diagonale » de sous-espaces ? Le sous-espace H_0 représente une partie commune dans les supplémentaires que l'on vient de déterminer. Le problème, c'est que H_F ne peut faire partie du supplémentaire de F , puisqu'il est lui-même dans F , et il en va de même pour H_G par rapport à G . Ce qu'il faudrait, c'est un espace « entre les deux ». Créons-le !

Pour commencer, utilisons l'hypothèse $\dim(F) = \dim(G)$ pour remarquer :

$$\dim(H_F) = \dim(F) - \dim(F \cap G) = \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(H_G).$$

On note alors cette dimension $d := \dim(H_F) = \dim(H_G)$. Soient $\mathcal{F} := \{u_i ; i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}$ une base de H_F et $\mathcal{G} := \{v_i ; i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}$ une base de H_G . On définit alors

$$\mathcal{H} := \{u_i + v_i ; i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}.$$

On peut facilement montrer que cette famille est libre, alors ne nous gênons pas pour le faire. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot (u_i + v_i) = 0_E.$$

Alors :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot u_i}_{\in H_F} = - \underbrace{\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot v_i}_{\in H_G} \in H_F \cap H_G = \{0_E\}.$$

Comme $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$, ça marche aussi) est libre, on obtient :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda_i = 0,$$

donc $\mathcal{H}$ est libre. En particulier, c'est une base de

$$H_1 := \text{vect}(\mathcal{H}),$$

qui est donc de dimension d également.

Remarque 3.5.1. Il pourrait être tentant, si on n'est pas très réveillés, d'imaginer que H_1 n'est autre que $H_F + H_G$. Ce n'est pas du tout le cas ! On ne considère pas ici toutes les combinaisons linéaires des bases des deux espaces : on ne fait que combiner ces deux bases. C'est une construction finalement assez basique : pour s'en convaincre, on peut imaginer que H_F et H_G sont des droites. Dans ce cas H_1 est une droite « entre les deux ».

Encore des intersections nulles. Pour finir, nous allons montrer que ce nouveau sous-espace H_1 est le bon candidat pour remplacer H_F et H_G dans les supplémentaires précédents. Avant cela, montrons une nouvelle intersection nulle :

$$H_0 \cap H_1 = \{0_E\}.$$

En effet, soit $u \in H_0 \cap H_1$. Alors $u \in H_1 \subset H_F + H_G \subset F + G$, donc $u \in H_0 \cap (F + G) = \{0_E\}$. Oui, parce que H_1 n'est pas $H_F + H_G$, mais il est dedans quand même.

On peut également montrer :

$$F \cap H_1 = \{0_E\} \quad \text{et} \quad G \cap H_1 = \{0_E\}.$$

Soit $u \in F \cap H_1$. Comme $u \in H_1$, on peut écrire :

$$u = \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot (u_i + v_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot u_i}_{=: u_F \in H_F} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot v_i}_{=: u_G \in H_G}.$$

Écrit autrement, $u_G = u - u_F$. Or, $u \in F$, $u_F \in H_F \subset F$, et $u_G \in H_G \subset G$, donc $u_G \in H_G \cap (F \cap G) = \{0_E\}$, donc $u_G = 0_E$. Or :

$$0_E = u_G = \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot v_i$$

et la famille $\mathcal{G}$ est libre, donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \lambda_i = 0,$$

et ainsi

$$u_F = \sum_{i=1}^d \lambda_i \cdot u_i = 0_E,$$

d'où $u = 0_E + 0_E = 0_E$.

Le bon supplémentaire. On pose

$$H := H_0 + H_1.$$

Comme il s'appelle H , il s'agit bien évidemment du sous-espace qui va répondre à l'exercice. Mais tâchons de trouver des arguments un peu plus solides.

Soit $u \in F \cap H$. Comme $u \in H = H_0 \oplus H_1$, il existe $(u_0, u_1) \in H_0 \times H_1$ tel que $u = u_0 + u_1$. Avec $u_1 \in H_1$, on trouve $(\tilde{u}_F, \tilde{u}_G) \in H_F \times H_G$ tel que $u_1 = \tilde{u}_F + \tilde{u}_G$. Par ailleurs, $u \in F = H_F \oplus (F \cap G)$, donc il existe $(u_F, u_{FG}) \in H_F \times (F \cap G)$ tel que $u = u_F + u_{FG}$. On obtient ainsi :

$$u_0 + \tilde{u}_F + \tilde{u}_G = u = u_F + u_{FG},$$

que l'on réécrit :

$$u_0 = u_F - \tilde{u}_F + u_{FG} - \tilde{u}_G.$$

Or, $u_F \in H_F \subset F$, et il en est de même pour $\tilde{u}_F$. On a de plus $u_{FG} \in F \cap G \subset F$ et $\tilde{u}_G \in H_G \subset G$, donc la somme de tout ce beau monde vit dans $F + G$. Autrement dit, on a obtenu $u_0 \in H_0 \cap (F + G) = \{0_E\}$, donc $u_0 = 0_E$, et ainsi :

$$u = 0_E + u_1 = u_1 \in F \cap H_1 = \{0_E\}.$$

Ainsi, $u = 0_E$ et on a montré que $F \cap H = \{0_E\}$.

Comme $H = H_0 \oplus H_1$, $\dim(H) = \dim(H_0) + \dim(H_1)$. Comme $\dim(H_1) = \dim(H_G)$, on peut faire exactement le même raisonnement que pour le premier supplémentaire de F pour obtenir que :

$$\dim(F) + \dim(H) = \dim(E),$$

donc on a bien obtenu $F \oplus H = E$. Les rôles de F et G étant symétriques, il suffit de les échanger pour obtenir $G \oplus H = E$.

Chapitre 4

Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Sauf mention plus explicite, F désigne également un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque.

4.1 Application linéaire

Définition 4.1.1. Une application $f: E \rightarrow F$ est dite linéaire si :

- $\forall (u, v) \in E \times E, f(u + v) = f(u) + f(v)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F :

$$\mathcal{L}(E, F) := \{f: E \rightarrow F ; f \text{ est linéaire}\}.$$

Exemple 4.1.2. L'identité est une application linéaire :

$$\text{Id}_E: x \mapsto x.$$

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$E \ni x \mapsto a \cdot x \in E$$

est linéaire.

Remarque 4.1.3. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire (sauf si $b = 0$).

Proposition 4.1.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer :

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E).$$

■

Proposition 4.1.5. Soit $f: E \rightarrow F$. Alors f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in E \times E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

Démonstration. Supposons f linéaire. Soient $(u, v) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme $\lambda \cdot u \in E$ et $\mu \cdot v \in E$, on applique successivement les deux points de la définition :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = f(\lambda \cdot u) + f(\mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

Réciproquement, soit $(u, v) \in E \times E$. Alors :

$$f(u + v) = f(1 \cdot u + 1 \cdot v) = 1 \cdot f(u) + 1 \cdot f(v) = f(u) + f(v).$$

Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. Alors :

$$f(\lambda \cdot u) = f(\lambda \cdot u + 0 \cdot u) = \lambda \cdot f(u) + 0 \cdot f(u) = \lambda \cdot f(u).$$

■

Exercice 4.1

[Solution page 123.](#)

Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in E \times E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

Définition 4.1.6. Une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ est appelée une forme linéaire.

Exemple 4.1.7. L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

Exercice 4.2

[Solution page 123.](#)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire. On suppose que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$. Montrer que f est surjective.

Définition 4.1.8. Une application linéaire de E vers E est appelée endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes définis sur E :

$$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E) = \{f: E \rightarrow E ; f \text{ est linéaire}\}.$$

Exemple 4.1.9. L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

est un endomorphisme.

Définition 4.1.10. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective, on dit que c'est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). Dans le cas particulier où $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un automorphisme.

Définition 4.1.11. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de f , noté $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f) := \{u \in E ; f(u) = 0_F\} \subset E.$$

On appelle image de f , noté $\text{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\text{Im}(f) := \{f(u) \in F ; u \in E\} = \{v \in F ; \exists u \in E / f(u) = v\} \subset F.$$

Exemple 4.1.12. On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (b - c, c - b). \end{aligned}$$

Commençons par montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Soient pour cela $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$, $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)) &= f((\lambda a_1 + a_2, \lambda b_1 + b_2, \lambda c_1 + c_2)) \\ &= (\lambda b_1 + b_2 - (\lambda c_1 + c_2), \lambda c_1 + c_2 - (\lambda b_1 + b_2)) \\ &= \lambda \cdot (b_1 - c_1, c_1 - b_1) + (b_2 - c_2, c_2 - b_2) \\ &= \lambda \cdot f((a_1, b_1, c_1)) + f((a_2, b_2, c_2)). \end{aligned}$$

Déterminons maintenant le noyau de cette application linéaire. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 (a, b, c) \in \ker(f) &\iff f((a, b, c)) = (0, 0) \\
 &\iff (b - c, c - b) = (0, 0) \\
 &\iff \begin{cases} b - c = 0 \\ c - b = 0 \end{cases} \\
 &\iff b = c,
 \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\ker(f) = \{(a, b, b) \in \mathbb{R}^3 ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Terminons en déterminant l'image de f . Soit $(x, y) \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f((a, b, c)) = (x, y)$, c'est-à-dire $(b - c, c - b) = (x, y)$. Autrement dit, $x = b - c$ et $y = c - b = -x$. Ainsi :

$$\text{Im}(f) \subset \text{vect}(\{(1, -1)\}).$$

Réciproquement, soit $(x, y) \in \text{vect}(\{(1, -1)\})$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = \lambda \cdot (1, -1)$. Considérons $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On pose $b = \lambda$ et $c = 0$. Alors $f((a, b, c)) = (\lambda, -\lambda) = (x, y)$. Autrement dit, $(x, y) \in \text{Im}(f)$. Ainsi :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(\{(1, -1)\}).$$

Proposition 4.1.13. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Noyau. Comme $f(0_E) = 0_F$, on a $0_E \in \ker(f)$. Soient $(u, v) \in \ker(f)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot \underbrace{f(u)}_{=0_F} + \mu \cdot \underbrace{f(v)}_{=0_F} = 0_F,$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \ker(f)$.

Image. Comme $f(0_E) = 0_F$, on a immédiatement $0_F \in \text{Im}(f)$. Soient $(v_1, v_2) \in \text{Im}(f) \times \text{Im}(f)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $(u_1, u_2) \in E \times E$ tel que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$. Alors :

$$\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 = \lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2) = f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) \in \text{Im}(f).$$

■

Proposition 4.1.14. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- (i) f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$;
- (ii) f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. (i) C'est la définition de surjectivité.

(ii) **Supposons f injective**, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in E \times E, (f(u) = f(v) \implies u = v).$$

Soit $u \in \ker(f)$. Alors $f(u) = 0_F$. Or, $f(0_E) = 0_F$, donc $u = 0_E$ par injectivité. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons $\ker(f) = \{0_E\}$. Soit $(u, v) \in E \times E$ tel que $f(u) = f(v)$. Autrement dit :

$$0_F = f(u) - f(v) = f(u - v),$$

donc $u - v \in \ker(f) = \{0_E\}$, donc $u - v = 0_E$, et ainsi $u = v$, d'où l'injectivité. ■

Proposition 4.1.15. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où G est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. Soient $(u, v) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= g(f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)) \\ &= g(\lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)) && \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda \cdot g(f(u)) + \mu \cdot g(f(v)) && \text{par linéarité de } g \\ &= \lambda \cdot g \circ f(u) + \mu \cdot g \circ f(v). \end{aligned}$$

Proposition 4.1.16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration. Soient $(v_1, v_2) \in F \times F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme f est bijective, il existe un unique $(u_1, u_2) \in E \times E$ tel que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2) &= f^{-1}(\lambda \cdot f(u_1) + \mu \cdot f(u_2)) && \text{par définition de } u_1 \text{ et } u_2 \\ &= f^{-1}(f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2)) && \text{par linéarité de } f \\ &= f^{-1} \circ f(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) \\ &= \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 && \text{car } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \\ &= \lambda \cdot f^{-1}(v_1) + \mu \cdot f^{-1}(v_2) && \text{par définition de } u_1 \text{ et } u_2. \end{aligned}$$

Proposition 4.1.17. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, muni de l'addition :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F), \quad (f + g): u \mapsto f(u) + g(u),$$

et de la multiplication par un réel :

$$\forall(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}(E, F), \quad (\lambda \cdot f): u \mapsto \lambda \cdot f(u),$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Démonstration. On montre tous les axiomes définissant un espace vectoriel (voir la Définition 3.1.1) en utilisant le fait que F est un espace vectoriel. Par exemple, soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $u \in E$:

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) = g(u) + f(u) = (g + f)(u)$$

car F est un espace vectoriel. Ainsi, $f + g = g + f$ et la commutativité est démontrée. Les autres propriétés se démontrent de la même façon. L'élément neutre n'est autre que la fonction identiquement nulle :

$$0_{\mathcal{L}(E, F)}: E \ni u \mapsto 0_F \in F.$$

■

Remarque 4.1.18. Comme on peut le voir dans la preuve de ce résultat, ainsi que dans l'Exercice 3.1, le fait que $\mathcal{L}(E, F)$ soit un espace vectoriel ne découle que du fait que F est un espace vectoriel : on n'a en réalité pas besoin que E soit un espace vectoriel.

4.2 Exemples d'applications linéaires

4.2.1 Quelques exemples pour commencer

On peut déjà citer deux exemples d'applications linéaires que l'on a déjà croisés. La première est la fonction nulle :

$$\begin{aligned} f_0: E &\rightarrow F \\ u &\mapsto 0_F. \end{aligned}$$

La seconde est l'identité :

$$\begin{aligned} \text{Id}_E: E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u. \end{aligned}$$

Citons également un exemple concret. L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \sum_{k=0}^n a_k X^k &\mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$, est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})$.

Un autre exemple, peut-être un peu plus exotique. L'application

$$\begin{aligned} f: \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ g &\mapsto (g(0), g(1), g(0) + g(1)) \end{aligned}$$

est dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$.

Remarque 4.2.1. Attention, on ne peut pas faire n'importe quoi non plus : l'application $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \ni g \mapsto g(0)^2$ n'est pas linéaire.

À partir d'une application linéaire, on peut en créer de « nouvelles » en considérant sa restriction à un sous-espace vectoriel.

Définition 4.2.2. Soit $f: E \rightarrow F$. Soit $G \subset E$. On appelle restriction de f à G , et on note $f|_G$, l'application

$$\begin{aligned} f|_G: G &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Proposition 4.2.3. Soit G un sous-espace vectoriel de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f|_G \in \mathcal{L}(G, F)$.

Démonstration. Soient $(u, v) \in G \times G$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme G est un espace vectoriel, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in G$, et ainsi :

$$f|_G(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v) = \lambda \cdot f|_G(u) + \mu \cdot f|_G(v).$$

■

4.2.2 Homothéties

Définition 4.2.4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. On appelle homothétie de rapport λ l'application

$$\begin{aligned} f_\lambda: E &\rightarrow E \\ u &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned} \in \mathcal{L}(E).$$

Proposition 4.2.5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors l'homothétie f_λ de rapport λ est un automorphisme, de réciproque $f_\lambda^{-1} = f_{1/\lambda}$ l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Soit $u \in E$. Alors :

$$f_{1/\lambda} \circ f_\lambda(u) = f_{1/\lambda}(f_\lambda(u)) = f_{1/\lambda}(\lambda \cdot u) = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \left(\frac{1}{\lambda} \lambda\right) \cdot u = 1 \cdot u = u.$$

■

4.2.3 Projecteurs

Définition 4.2.6. On appelle projecteur (ou projection) de E tout endomorphisme p de E vérifiant :

$$p \circ p = p.$$

Exemple 4.2.7. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

est un projecteur.

Exemple 4.2.8. Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. L'application

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k &\mapsto \begin{cases} P, & \text{si } \deg(P) \leq N, \\ \sum_{k=0}^N a_k X^k, & \text{sinon} \end{cases} = \sum_{k=0}^{\min(\deg(P), N)} a_k X^k \end{aligned}$$

est un projecteur.

Proposition 4.2.9. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si :

$$\forall v \in \text{Im}(p), \quad p(v) = v.$$

Démonstration. Dans un sens, supposons que p est un projecteur. Soit $v \in \text{Im}(p)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $p(u) = v$. Ainsi :

$$p(v) = p(p(u)) = p \circ p(u) = p(u) = v,$$

car $p \circ p = p$.

Réciproquement, supposons que :

$$\forall v \in \text{Im}(p), \quad p(v) = v.$$

Soit $u \in E$. On note $v := p(u)$. Alors :

$$p \circ p(u) = p(p(u)) = p(v) = v = p(u),$$

car $v \in \text{Im}(p)$. Ainsi, $p \circ p = p$. ■

Proposition 4.2.10. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur, alors :

$$E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$

Démonstration. Somme directe. Soit $u \in \ker(p) \cap \operatorname{Im}(p)$. Comme $u \in \ker(p)$, $p(u) = 0_E$. D'autre part, $u \in \operatorname{Im}(p)$ donc, par ce qui précède :

$$u = p(u) = 0_E,$$

donc $\ker(p) \cap \operatorname{Im}(p) = \{0_E\}$.

Montrons que $E = \ker(p) + \operatorname{Im}(p)$. Soit $u \in E$.

Si le résultat est vrai, on doit trouver $(u_K, u_I) \in \ker(p) \times \operatorname{Im}(p)$ tel que $u = u_K + u_I$. On aurait alors :

$$p(u) = p(u_K + u_I) = p(u_K) + p(u_I) = 0_E + u_I = u_I,$$

ce qui nous donne :

$$u_I = p(u) \quad \text{et} \quad u_K = u - u_I = u - p(u).$$

Or, on peut toujours écrire :

$$u = u - p(u) + p(u).$$

Par définition, $p(u) \in \operatorname{Im}(p)$. Par ailleurs :

$$p(u - p(u)) = p(u) - p \circ p(u) = p(u) - p(u) = 0_E,$$

donc $u - p(u) \in \ker(p)$, et on obtient ainsi le résultat. ■

Remarque 4.2.11. Attention, la réciproque est fausse : si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$, cela n'implique pas forcément que f est un projecteur. Pour s'en convaincre, on peut considérer le contre-exemple

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto (2a, 0) \end{aligned}$$

dont on peut calculer :

$$\ker(f) = \operatorname{vect}(\{(1, 0)\}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(\{(0, 1)\})$$

qui vérifient bien $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$. Cependant :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f \circ f((a, b)) = 2 \cdot f((a, b)) \neq f((a, b)),$$

donc $f \neq f \circ f$ et ainsi f n'est pas un projecteur.

Proposition 4.2.12. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Pour tout $u \in E$, on note (u_F, u_G) l'unique couple dans $F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Soit

$$\begin{aligned} p: E &\rightarrow E \\ u_F + u_G &\mapsto u_F. \end{aligned}$$

Alors :

- (i) $p \in \mathcal{L}(E)$;
- (ii) $\text{Im}(p) = F$;
- (iii) $\ker(p) = G$;
- (iv) p est un projecteur.

Démonstration. (i) Soient $(u, v) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On écrit $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$. Alors :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \underbrace{(\lambda \cdot u_F + \mu \cdot v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda \cdot u_G + \mu \cdot v_G)}_{\in G}.$$

Comme la somme $F + G$ est directe, on a trouvé l'unique décomposition de $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$. Donc :

$$p(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot u_F + \mu \cdot v_F = \lambda \cdot p(u) + \mu \cdot p(v),$$

et ainsi $p \in \mathcal{L}(E)$.

- (ii) Par définition de p , $\text{Im}(p) \subset F$. Réciproquement, soit $u_F \in F$. On peut toujours écrire :

$$u_F = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G},$$

donc $p(u_F) = u_F$ et ainsi $u_F \in \text{Im}(p)$. Ainsi, $F \subset \text{Im}(p)$, d'où l'égalité.

- (iii) Soit $u_G \in G$. On peut alors écrire

$$u_G = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u_G}_{\in G},$$

donc $p(u_G) = 0_E$ et ainsi $u_G \in \ker(p)$. Donc $G \subset \ker(p)$.

Soit $u \in \ker(p)$. On écrit $u = u_F + u_G$. Comme $u \in \ker(p)$, on a :

$$0_E = p(u) = u_F.$$

Ainsi, $u = 0_E + u_G = u_G \in G$, donc $\ker(p) \subset G$, d'où l'égalité.

- (iv) Soit $v \in \text{Im}(p)$. Par ce qui précède, $v \in F$ et $p(v) = v$. On peut donc appliquer la [Proposition 4.2.9](#) et conclure. ■

Définition 4.2.13. L'application définie dans la Proposition 4.2.12 est appelée projection de E sur F parallèlement à G .

Pour se convaincre de la pertinence de cette dénomination, rien ne vaut un petit dessin. En considérant $E := \mathbb{R}^2$ et F et G deux droites vectorielles (différentes), on obtient la Figure 4.1.

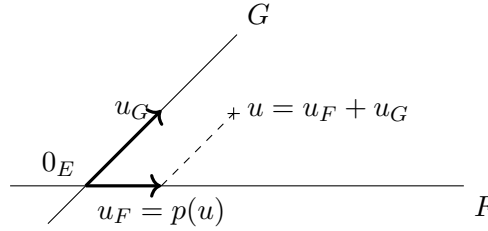


FIGURE 4.1 – Exemple dans le plan d'une projection sur une droite parallèlement à une autre : pour projeter u sur F , on « suit » un chemin parallèle à la droite G .

Corollaire 4.2.14. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Démonstration. Dans un premier temps, si p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$, alors p est un projecteur par la Proposition 4.2.12.

Réciproquement, supposons que p est un projecteur. Alors, par la Proposition 4.2.10, on sait que $E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p)$. Pour $u \in E$, on peut donc écrire $u = u_K + u_I$ avec $(u_K, u_I) \in \ker(p) \times \text{Im}(p)$. Ainsi :

$$p(u) = p(u_K + u_I) = p(u_I) + p(u_K) = p(u_I) + 0_E = p(u_I) = u_I$$

car $u_K \in \ker(p)$ et $u_I \in \text{Im}(p)$ (on invoque ici la Proposition 4.2.9). Autrement dit :

$$p: u_K + u_I \mapsto u_I.$$

■

Dans la Proposition 4.2.12, on a écrit $E = F \oplus G$ et on a choisi de projeter sur F . Il est bien sûr tout à fait possible de projeter sur G : au lieu de définir $p: u_F + u_G \mapsto u_F$, on peut définir une projection $q: u_F + u_G \mapsto u_G$ avec exactement les mêmes propriétés (F et G ont des rôles complètement symétriques dans ce cas). Le point intéressant est que l'on peut relier ces deux projecteurs :

$$\forall u = u_F + u_G \in E, \quad q(u) = u_G = u - u_F = (\text{Id}_E - p)(u).$$

Il s'agit en réalité d'une propriété inhérente aux projecteurs, comme l'indique le résultat suivant.

Proposition 4.2.15. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $q := \text{Id}_E - p$ est un projecteur.

Démonstration. Supposons que p est un projecteur. Pour tout $u \in E$:

$$q(p(u)) = (\text{Id}_E - p)(p(u)) = p(u) - p(p(u)) = p(u) - p(u) = 0_E$$

car $p \circ p = p$. Ainsi :

$$q \circ q(u) = q(q(u)) = q((\text{Id}_E - p)(u)) = q(u - p(u)) = q(u) - q(p(u)) = q(u) - 0_E = q(u),$$

d'où $q \circ q = q$.

Réciproquement, supposons que q est un projecteur. Comme $p = \text{Id}_E - q$, c'est un projecteur par ce qui précède. ■

Corollaire 4.2.16. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors :

$$\text{Im}(p) = \ker(\text{Id}_E - p) \quad \text{et} \quad \ker(p) = \text{Im}(\text{Id}_E - p).$$

Démonstration. Soit $u \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Im}(p) &\iff p(u) = u \iff u - p(u) = 0_E \\ &\iff (\text{Id}_E - p)(u) = 0_E \iff u \in \ker(\text{Id}_E - p). \end{aligned}$$

De même, comme $q = \text{Id}_E - p$ est un projecteur :

$$u \in \text{Im}(\text{Id}_E - p) = \text{Im}(q) \iff u \in \ker(\text{Id}_E - q) = \ker(p).$$

■

4.2.4 Symétries

Définition 4.2.17. On dit que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si :

$$s \circ s = \text{Id}_E.$$

Exemple 4.2.18. L'application $x \mapsto -x$ est une symétrie.

Proposition 4.2.19. (i) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors $p := \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur.

(ii) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors $s := 2p - \text{Id}_E$ est une symétrie.

Démonstration. (i)

$$\begin{aligned}
 p \circ p &= \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \circ \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \\
 &= \frac{1}{4}(s \circ s + s \circ \text{Id}_E + \text{Id}_E \circ s + \text{Id}_E \circ \text{Id}_E) \\
 &= \frac{1}{4}(\text{Id}_E + s + s + \text{Id}_E) \\
 &= \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \\
 &= p.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 s \circ s &= (2p - \text{Id}_E) \circ (2p - \text{Id}_E) \\
 &= 4p \circ p - 2p \circ \text{Id}_E - 2\text{Id}_E \circ p + \text{Id}_E \circ \text{Id}_E \\
 &= 4p - 2p - 2p + \text{Id}_E \\
 &= \text{Id}_E.
 \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.2.20. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors :

$$E = \ker(s + \text{Id}_E) \oplus \ker(s - \text{Id}_E).$$

Démonstration. Soit $p := \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors p est un projecteur, donc :

$$\begin{aligned}
 E &= \ker(p) \oplus \text{Im}(p) \\
 &= \ker(p) \oplus \ker(\text{Id}_E - p) \\
 &= \ker\left(\frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)\right) \oplus \ker\left(\frac{1}{2}(s - \text{Id}_E)\right) \\
 &= \ker(s + \text{Id}_E) \oplus \ker(s - \text{Id}_E).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 4.2.21. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Pour tout $u \in E$, on note (u_F, u_G) l'unique couple dans $F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. On pose

$$\begin{aligned}
 s: E &\rightarrow E \\
 u_F + u_G &\mapsto u_F - u_G.
 \end{aligned}$$

Alors :

- (i) $s \in \mathcal{L}(E)$;
- (ii) s est une symétrie ;

$$(iii) \quad \ker(s - \text{Id}_E) = F \text{ et } \ker(s + \text{Id}_E) = G.$$

Démonstration. (i) Soient $(u, v) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On écrit $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$. Alors :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \underbrace{(\lambda \cdot u_F + \mu \cdot v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda \cdot u_G + \mu \cdot v_G)}_{\in G},$$

d'où :

$$\begin{aligned} s(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= (\lambda \cdot u_F + \mu \cdot v_F) - (\lambda \cdot u_G + \mu \cdot v_G) \\ &= \lambda \cdot (u_F - u_G) + \mu \cdot (v_F - v_G) \\ &= \lambda \cdot s(u) + \mu \cdot s(v). \end{aligned}$$

(ii) Soit $u = u_F + u_G \in E$. Alors

$$s(u) = u_F - u_G = \underbrace{u_F}_{\in F} + \underbrace{(-u_G)}_{\in G},$$

donc :

$$s(s(u)) = u_F - (-u_G) = u_F + u_G = u,$$

et ainsi $s \circ s = \text{Id}_E$.

(iii) Soit $u \in F$. Alors

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G},$$

donc $s(u) = u - 0_E$, d'où $s(u) - u = 0_E$, ou encore $(s - \text{Id}_E)(u) = 0_E$, c'est-à-dire $u \in \ker(s - \text{Id}_E)$.

Soit $u \in \ker(s - \text{Id}_E)$. Alors $(s - \text{Id}_E)(u) = 0_E$. Écrivons $u = u_F + u_G$. Alors $s(u) = u_F - u_G$, d'où :

$$0_E = (s - \text{Id}_E)(u) = s(u) - u = u_F - u_G - u_F - u_G = -2 \cdot u_G.$$

Donc $u_G = 0_E$ et ainsi $u = u_F \in F$.

Soit $u \in G$. Alors

$$u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G},$$

donc $s(u) = 0_E - u = -u$, donc $s(u) + u = 0_E$, ou encore $(s + \text{Id}_E)(u) = 0_E$.

Soit $u \in \ker(s + \text{Id}_E)$. Alors $(s + \text{Id}_E)(u) = 0_E$. On écrit $u = u_F + u_G$, donc $s(u) = u_F - u_G$. Ainsi :

$$0_E = (s + \text{Id}_E)(u) = s(u) + u = u_F - u_G + u_F + u_G = 2 \cdot u_F.$$

Donc $u_F = 0_E$ et ainsi $u = u_G \in G$.

■

Définition 4.2.22. L'application définie dans la Proposition 4.2.21 est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Là encore, on peut se convaincre de la pertinence de cette dénomination avec un petit dessin dans le plan : on pourra pour cela se référer à la Figure 4.2.

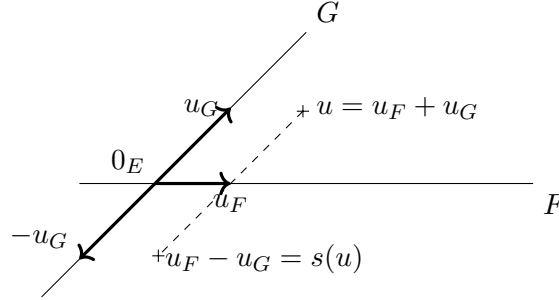


FIGURE 4.2 – Exemple dans le plan d'une symétrie par rapport à une droite parallèlement à une autre : on cherche le symétrique d'un point en suivant une droite parallèle à G .

Corollaire 4.2.23. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

Démonstration. Soit $u \in E$. On a montré dans le Corollaire 4.2.20 que $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$, donc on trouve un unique couple $(u_1, u_2) \in \ker(s - \text{Id}_E) \times \ker(s + \text{Id}_E)$ tel que $u = u_1 + u_2$. Ainsi :

$$s(u) = s(u_1) + s(u_2).$$

Or, $u_1 \in \ker(s - \text{Id}_E)$, donc $s(u_1) = u_1$, et $u_2 \in \ker(s + \text{Id}_E)$, donc $s(u_2) = -u_2$. Ainsi :

$$s : u_1 + u_2 \mapsto u_1 - u_2.$$

■

4.3 Application linéaire en dimension finie

Dans cette section, on suppose que E est de dimension finie. On note $N := \dim(E)$ et on se donne une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_N)$ de E .

4.3.1 Applications coordonnées

Théorème 4.3.1. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, il existe une unique forme linéaire $c_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad c_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{aligned}\Psi: \mathbb{R}^N &\rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_N) &\mapsto \sum_{j=1}^N x_j \cdot e_j.\end{aligned}$$

Linéarité de Ψ . Soient $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N)) &= \Psi((\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_N + y_N)) \\ &= \sum_{j=1}^N (\lambda x_j + y_j) \cdot e_j \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^N x_j \cdot e_j \right) + \sum_{j=1}^N y_j \cdot e_j \\ &= \lambda \cdot \Psi((x_1, \dots, x_N)) + \Psi((y_1, \dots, y_N)),\end{aligned}$$

donc Ψ est linéaire.

Surjectivité de Ψ . Soit $u \in E$. On trouve $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$u = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot e_j = \Psi((\lambda_1, \dots, \lambda_N)).$$

Injectivité de Ψ . Soit $(x_1, \dots, x_N) \in \ker(\Psi)$. Autrement dit :

$$0_E = \Psi((x_1, \dots, x_N)) = \sum_{j=1}^N x_j \cdot e_j.$$

Or, $\mathcal{B}$ est une base donc, en particulier, c'est une famille libre. Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad x_j = 0,$$

ce qui montre que $\ker(\Psi) = \{0_{\mathbb{R}^N}\}$, donc Ψ est injective.

Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On définit l'application

$$\begin{aligned}\phi_i: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_N) &\mapsto x_i.\end{aligned}$$

Linéarité de ϕ_i . Soient $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\phi_i(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N)) &= \phi_i((\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_N + y_N)) \\ &= \lambda x_i + y_i \\ &= \lambda \phi_i((x_1, \dots, x_N)) + \phi_i((y_1, \dots, y_N)),\end{aligned}$$

ce qui montre que ϕ_i est linéaire.

Existence de c_i . On définit alors :

$$c_i := \phi_i \circ \Psi^{-1}.$$

Comme Ψ est un isomorphisme, Ψ^{-1} est bien définie et est linéaire (voir [Proposition 4.1.16](#)). Comme ϕ_i est linéaire, on en déduit que c_i est également linéaire (voir [Proposition 4.1.15](#)). On a donc bien $c_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Soit maintenant $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On note $u_j \in \mathbb{R}^N$ le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la j -ème qui est fixée à 1 :

$$u_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0).$$

Ainsi, $\Psi(u_j) = e_j$, donc $\Psi^{-1}(e_j) = u_j$ et on obtient $c_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Unicité de c_i . Soit $\tilde{c}_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \tilde{c}_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

On note $d_i := c_i - \tilde{c}_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad d_i(e_j) = c_i(e_j) - \tilde{c}_i(e_j) = \delta_{ij} - \delta_{ij} = 0.$$

Pour tout $u \in E$, on trouve $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$u = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot e_j.$$

Par linéarité de d_i , on obtient alors :

$$d_i(u) = d_i \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot e_j \right) = \sum_{j=1}^N \lambda_j d_i(e_j) = 0.$$

Ainsi, d_i est identiquement nulle, donc $\tilde{c}_i = c_i$. ■

Définition 4.3.2. Les formes linéaires c_i définies dans le [Théorème 4.3.1](#) sont appelées applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

La pertinence de cette dénomination se remarque en considérant $u \in E$ quelconque. En écrivant

$$u = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot e_j,$$

on trouve, par linéarité :

$$c_i(u) = \lambda_i.$$

Autrement dit, on peut utiliser les applications coordonnées pour décomposer n'importe quel vecteur sans avoir à introduire ses coefficients :

$$\forall u \in E, \quad u = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot e_i.$$

Remarque 4.3.3. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, c_i est une forme linéaire non identiquement nulle (car $c_i(e_i) = 1$). On en déduit qu'elle est surjective, ce qui peut aussi se remarquer directement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad c_i(\lambda \cdot e_i) = \lambda.$$

En revanche, c_i n'est pas injective dès que $N \geq 2$. En effet, pour un certain $j \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\}$:

$$c_i(e_i) = 1 = c_i(e_i + e_j)$$

car $c_i(e_j) = 0$, et pourtant $e_i \neq e_i + e_j$.

4.3.2 Le théorème du rang

Proposition 4.3.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((f(e_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}).$$

En particulier, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\text{Im}(f)) \leq N$.

Démonstration. Soit $v \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$, ce qui s'écrit également :

$$v = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot f(e_i).$$

On a donc montré $\text{Im}(f) \subset \text{vect}((f(e_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})$. Réciproquement, il est immédiat de montrer que tout élément de $\text{vect}((f(e_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})$ est dans $\text{Im}(f)$, d'où l'égalité. ■

Définition 4.3.5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f , noté $\text{rang}(f)$, la dimension de l'image de f :

$$\text{rang}(f) := \dim(\text{Im}(f)).$$

Théorème 4.3.6. Soit $\mathcal{F} := (v_1, \dots, v_N)$ une famille de vecteurs de F . Alors :

$$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F) / \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, f(e_i) = v_i.$$

Démonstration. Unicité. Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f_1(e_i) = f_2(e_i) = v_i.$$

Soit $f := f_1 - f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f(e_i) = f_1(e_i) - f_2(e_i) = v_i - v_i = 0_F.$$

On obtient :

$$\forall u \in E, \quad f(u) = f\left(\sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot f(e_i) = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot 0_F = 0_F,$$

donc $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$ est ainsi $f_1 = f_2$.

Existence. On définit l'application :

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ u &\mapsto \sum_{j=1}^N c_j(u) \cdot v_j. \end{aligned}$$

Comme les applications coordonnées sont linéaires, f est linéaire. De plus :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^N c_j(e_i) \cdot v_j = v_i.$$

■

Corollaire 4.3.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_N))$ caractérise entièrement f .

Proposition 4.3.8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est un isomorphisme, alors F est de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. Comme f est un isomorphisme, en particulier, f est surjective et $F = \text{Im}(f)$ est de dimension finie par la Proposition 4.3.4, avec de plus $\dim(F) \leq N$. Par la Proposition 4.1.16, on sait par ailleurs que $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Comme on vient de montrer que F est de dimension finie, on peut appliquer la Proposition 4.3.4 à f^{-1} pour en déduire que $\text{Im}(f^{-1})$ est de dimension finie, avec $\dim(\text{Im}(f^{-1})) \leq \dim(F)$. Or, f^{-1} étant bijective, elle est en particulier surjective, donc $\text{Im}(f^{-1}) = E$, ce qui termine la preuve. ■

Théorème 4.3.9 (du rang). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(\ker(f)) + \text{rang}(f) = \dim(E).$$

Démonstration. Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E : $\ker(f) \oplus H = E$, d'où

$$\dim(\ker(f)) + \dim(H) = \dim(E).$$

Soit $\ell: H \rightarrow \text{Im}(f)$ la restriction de f à H . Par la Proposition 4.2.3, on sait que $\ell \in \mathcal{L}(H, \text{Im}(f))$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Soit $w \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) = w$. Comme $\ker(f) \oplus H = E$, on trouve $(u_0, u_H) \in \ker(f) \times H$ tel que $u = u_0 + u_H$. Ainsi :

$$w = f(u) = f(u_0 + u_H) = f(u_0) + f(u_H) = 0_F + \ell(u_H) = \ell(u_H).$$

Donc ℓ est surjective. Soit maintenant $v \in \ker(\ell)$. Alors :

$$f(v) = \ell(v) = 0_F.$$

Ainsi, $v \in \ker(f) \cap H = \{0_E\}$. Donc $\ker(\ell) = \{0_E\}$ et ℓ est injective.

On vient de montrer que ℓ est un isomorphisme entre H et $\text{Im}(f)$. Ainsi, par la [Proposition 4.3.8](#), $\dim(H) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f)$, ce qui permet de conclure. ■

Exercice 4.3

[Solution page 124.](#)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies tels que $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f n'est pas injective.

Corollaire 4.3.10. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- (i) si f est injective, $\dim(E) \leq \dim(F)$;
- (ii) si f est surjective, $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Démonstration. (i) Supposons f injective. Alors $\ker(f) = \{0_E\}$, donc $\dim(\ker(f)) = 0$ et le [Théorème 4.3.9](#) donne :

$$\dim(E) = \text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F)$$

car $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

- (ii) Supposons f surjective. Alors $\text{Im}(f) = F$, donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$ et le [Théorème 4.3.9](#) donne :

$$\dim(F) = \text{rang}(f) = \dim(E) - \underbrace{\dim(\ker(f))}_{\geq 0} \leq \dim(E).$$

■

Corollaire 4.3.11. Supposons que $\dim(F) = \dim(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est injective ;
- (iii) f est surjective.

Démonstration. On part du [Théorème 4.3.9](#) :

$$\dim(\ker(f)) + \text{rang}(f) = \dim(E) = \dim(F).$$

Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \dim(\ker(f)) = 0 \\ &\iff \text{rang}(f) = \dim(F) \\ &\iff \text{Im}(f) = F && \text{par le Corollaire 3.4.16} \\ &\iff f \text{ surjective.} \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.3.12. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Exercice 4.4

[Solution page 124.](#)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que toute symétrie de E est bijective.
2. Montrer que le seul projecteur bijectif de E est l'identité.

Corollaire 4.3.13. Supposons que F est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E par f est une base de F .

Démonstration. Supposons f bijective. Alors, par la [Proposition 4.3.8](#), $\dim(F) = \dim(E) = N$. Par la [Proposition 4.3.4](#), on sait que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_N))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$. Or, f est surjective, donc $\text{Im}(f) = F$. Ainsi, $(f(e_1), \dots, f(e_N))$ est une famille génératrice de F contenant $N = \dim(F)$ vecteurs, donc c'est une base de F .

Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est telle que $(f(e_1), \dots, f(e_N))$ est une base de F . Comme cette dernière contient N vecteurs, on en déduit que $\dim(F) = N = \dim(E)$. Soit $v \in F$. On utilise cette base :

$$v = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot e_i\right) \in \text{Im}(f),$$

donc $\text{Im}(f) = F$, et ainsi f est surjective, donc bijective (par le [Corollaire 4.3.11](#)). ■

Proposition 4.3.14. Supposons que F est de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F).$$

Démonstration. Soit $P := \dim(F)$ et soit $(v_1, \dots, v_P)$ une base de F . Pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket$, on définit $f_{ik} \in \mathcal{L}(E, F)$ par :

$$f_{ik} : E \rightarrow F$$

$$e_j \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i, \\ v_k, & \text{si } j = i, \end{cases} \quad \text{pour tout } j \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Soit

$$\mathcal{F} := (f_{ik})_{(i,k) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket}.$$

On peut déjà remarquer que

$$\text{card}(\mathcal{F}) = NP = \dim(E) \dim(F).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $u \in E$. On commence par écrire :

$$u = \sum_{j=1}^N c_j(u) \cdot e_j.$$

On peut remarquer que :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket, \quad f_{ik}(u) = \sum_{j=1}^N c_j(u) \cdot f_{ik}(e_j) = c_i(u) \cdot f_{ik}(e_i) = c_i(u) \cdot v_k.$$

Par ailleurs :

$$f(u) = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot f(e_i).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $f(e_i) \in F$, donc on trouve $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{iP}) \in \mathbb{R}^P$ tel que :

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot v_k.$$

Ainsi :

$$f(u) = \sum_{i=1}^N c_i(u) \cdot \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot v_k = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot (c_i(u) \cdot v_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot f_{ik}(u).$$

On en déduit :

$$f = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot f_{ik},$$

donc $\mathcal{L}(E, F) = \text{vect}(\mathcal{F})$.

Soit $(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1P}, \dots, \lambda_{N1}, \dots, \lambda_{NP}) \in \mathbb{R}^{NP}$ tel que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot f_{ik} = 0_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

En particulier, pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$0_F = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P \lambda_{ik} \cdot f_{ik}(e_j) = \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^N \lambda_{ik} \cdot \underbrace{f_{ik}(e_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \sum_{k=1}^P \lambda_{jk} \cdot v_k.$$

Comme la famille $(v_1, \dots, v_P)$ est libre, on en déduit :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, P \rrbracket, \quad \lambda_{jk} = 0,$$

donc $\mathcal{F}$ est libre. ■

4.4 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 4.1

Supposons que f est une application linéaire. Soient $(u, v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(\lambda \cdot u + v) = f(\lambda \cdot u + 1 \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + 1 \cdot f(v) = \lambda \cdot f(u) + f(v).$$

Réciproquement, supposons cette nouvelle condition vraie. Soient $(u, v) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Comme E est un espace vectoriel, $\mu \cdot v \in E$, donc la condition donnée implique :

$$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + f(\mu \cdot v).$$

On écrit alors :

$$f(\mu \cdot v) = f(\mu \cdot v + 0_E) = \mu \cdot f(v) + f(0_E).$$

On termine en remarquant que $f(0_E) = 0_F$ (la preuve est similaire à celle de la Proposition 4.1.4).

Solution de l'Exercice 4.2

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit

$$u_y := y \frac{1}{f(u)} u \in E.$$

Ainsi :

$$f(u_y) = f\left(y \frac{1}{f(u)} u\right) = y \frac{1}{f(u)} f(u) = y.$$

Solution de l'Exercice 4.3

On applique le [Théorème 4.3.9](#) :

$$\dim(\ker(f)) + \text{rang}(f) = \dim(E),$$

donc :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \text{rang}(f).$$

Or, $\dim(E) = 4$. De plus :

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(F) = 3,$$

d'où :

$$\dim(\ker(f)) \geq 4 - 3 = 1.$$

En particulier, il n'est pas possible d'avoir $\dim(\ker(f)) = 0$, donc $\ker(f) \neq \{0_E\}$ et ainsi f n'est pas injective.

Solution de l'Exercice 4.4

1. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Soit $u \in \ker(s)$. Alors $s(u) = 0_E$. Comme de plus s est une symétrie, on obtient :

$$u = s \circ s(u) = s(s(u)) = s(0_E) = 0_E,$$

donc $\ker(s) = \{0_E\}$. Ainsi, s est injective, et donc surjective par le [Corollaire 4.3.12](#) car E est de dimension finie.

2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur bijectif. En particulier, p est surjectif : $\text{Im}(p) = E$. Soit $u \in E = \text{Im}(p)$. Alors (voir [Proposition 4.2.10](#)) $p(u) = u$, et ainsi :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u = \text{Id}_E(u),$$

donc $p = \text{Id}_E$.

Chapitre 5

Matrices

5.1 Définition

Définition 5.1.1. On appelle matrice un tableau rectangulaire de réels. La matrice est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes. Les réels dans le tableau sont appelés coefficients de la matrice. Pour une matrice A donnée, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est noté A_{ij} ou a_{ij} . On a les représentations suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij}).$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels.

Exemple 5.1.2. On peut par exemple penser à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

pour laquelle on a $A_{11} = 1$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 0$, et ainsi de suite.

Remarque 5.1.3. Deux matrices sont égales si elles sont de même taille et que tous leurs coefficients sont égaux :

$$A = B \iff ((A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, A_{ij} = B_{ij}).$$

Définition 5.1.4. Une matrice de taille $n \times p$ est dite :

- ligne si $n = 1$ (on parle aussi de vecteur ligne) ;
- colonne si $p = 1$ (on parle aussi de vecteur colonne).

Définition 5.1.5. La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, et est notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$, ou simplement 0 si le contexte ne laisse place à aucune ambiguïté :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})})_{ij} = 0.$$

Définition 5.1.6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A , et on note A^T , la matrice dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Exemple 5.1.7. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

admet pour transposée

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.1.8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $(A^T)^T = A$.

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc $(A^T)^T \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. De plus :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad ((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij},$$

d'où le résultat. ■

Notation 5.1.9. — Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. On note

$$C = (A \ B)$$

la concaténation (horizontale) de A et B . Autrement dit, $C \in \mathcal{M}_{n,p+q}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p+q \rrbracket, \quad C_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{si } j \leq p, \\ B_{i,j-p}, & \text{si } j > p. \end{cases}$$

— Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. On note

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

la concaténation (verticale) de A et B . Autrement dit, $C \in \mathcal{M}_{n+m,p}(\mathbb{R})$ et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad C_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{si } i \leq n, \\ B_{i-n,j}, & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Dit de manière un peu moins formelle, concaténer des matrices consiste tout simplement à « coller » bout à bout des matrices de tailles compatibles.

Exemple 5.1.10. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.1.11. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad C_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (C_j)_{i1} = A_{ij}.$$

On peut ainsi noter :

$$A = (C_1 \cdots C_p).$$

De même, on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (L_i)_{1j} = A_{ij}.$$

On note alors :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

5.2 Structure d'espace vectoriel

Définition 5.2.1. Soient A et B deux matrices de taille $n \times p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

ainsi que $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

On peut représenter ces opérations simplement :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition 5.2.2. On appelle matrice élémentaire de taille $n \times p$ d'indices $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ la matrice $E_{k\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (E_{k\ell})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Exemple 5.2.3. Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2.4. Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et on a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel se démontre de la même façon que $\mathbb{R}^n$. Intéressons-nous à sa dimension. La famille

$$\{E_{k\ell} ; (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket\}$$

est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En effet :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}.$$

Ainsi, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Soient $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{np}$ des réels tels que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}.$$

Par définition des opérations sur les matrices, on obtient alors directement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_{ij} = 0,$$

donc la famille des matrices élémentaires est également libre : il s'agit donc d'une base. ■

Proposition 5.2.5. L'application

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Linéarité. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ainsi $(A + B)^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad ((A + B)^T)_{ij} = (A + B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij},$$

d'où $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc $(\lambda A)^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad ((\lambda A)^T)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji} = \lambda (A^T)_{ij},$$

d'où $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Bijektivité. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $A^T = 0$. Alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad A_{ij} = (A^T)_{ji} = 0,$$

donc $A = 0$ et ainsi l'application transposée est injective. Comme $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}))$, on en déduit qu'elle est bijective (par le [Corollaire 4.3.11](#)). ■

5.3 Produit matriciel

Définition 5.3.1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle produit (matriciel) de A et B , noté AB , la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}.$$

Exemple 5.3.2. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.3.3. Dans cet exemple, le produit BA n'est pas défini.

Proposition 5.3.4. Le produit matriciel satisfait les propriétés suivantes.

- (i) $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}), \quad (AB)C = A(BC).$
- (ii) $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}),$
 $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)D = BD + CD.$
- (iii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}A = 0_{\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})}$ et $A0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})}.$
- (iv) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda A)B = A(\lambda B).$

Démonstration. (i) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^q (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{l=1}^p A_{il} B_{lk} \right) C_{kj} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^p (A_{il} B_{lk}) C_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^p A_{il} (B_{lk} C_{kj}) = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^q A_{il} (B_{lk} C_{kj}) = \sum_{l=1}^p A_{il} \sum_{k=1}^q (B_{lk} C_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^p A_{il} (BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}. \end{aligned}$$

(ii) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (A(B + C))_{ij} &= \sum_{k=1}^p A_{ik} (B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^p A_{ik} (B_{kj} + C_{kj}) = \sum_{k=1}^p (A_{ik} B_{kj} + A_{ik} C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^p A_{ik} C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}. \end{aligned}$$

L'autre égalité se traite de la même manière.

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$(0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}A)_{ij} = \sum_{k=1}^n 0 \cdot A_{kj} = 0,$$

et il en va de même dans l'autre sens.

(iv) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\begin{aligned} ((\lambda A)B)_{ij} &= \sum_{k=1}^p (\lambda A)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^p (\lambda A_{ik}) B_{kj} = \sum_{k=1}^p A_{ik} (\lambda B_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^p A_{ik} (\lambda B)_{kj} = (A(\lambda B))_{ij}. \end{aligned}$$



Remarque 5.3.5. Le produit matriciel n'est ni commutatif, ni intègre.

Approfondissons un peu cette dernière remarque. Affirmer que le produit matriciel n'est pas commutatif signifie que, pour deux matrices A et B , on n'a pas nécessairement $AB = BA$, et ce même quand les deux produits sont bien définis. Pour que les deux produits soient définis, il est nécessaire que leurs tailles soient compatibles des deux points de vue : si A est de taille $n \times p$, alors B doit être de taille $p \times n$. Or, avec ce choix, $AB \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tandis que $BA \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$: il ne peut donc y avoir égalité que dans le cas où $n = p$. Mais cela ne signifie pas pour autant que le produit matriciel dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est commutatif (en d'autres termes, considérer des matrices dans cet espace est une condition nécessaire, mais pas suffisante). Par exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Affirmer que le produit matriciel n'est pas intègre signifie que, pour deux matrices A et B , avoir $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. Par exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})}$$

donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})}.$$

Une autre façon de le dire est que, pour trois matrices A , B et C , avoir $AB = AC$ n'implique pas $B = C$. Par exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $AB = AC$, alors que $B \neq C$.

Définition 5.3.6. On appelle matrice identité de taille $n \in \mathbb{N}^*$, notée I_n , la matrice

de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}.$$

Schématiquement, on obtient :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.3.7. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$I_n A = A = A I_p.$$

Démonstration. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors :

$$(I_n A)_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

et

$$(A I_p)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (I_p)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \delta_{kj} = A_{ij}.$$

■

Proposition 5.3.8. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Alors :

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et ainsi $(AB)^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$. De plus, $B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $B^T A^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^p A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^p (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^p (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}. \end{aligned}$$

■

Exercice 5.1

Solution page 158.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- a. Calculer

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b. Calculer

$$(1 \ 0) A, \quad (0 \ 1) A.$$

2. Soit
- $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$
- . On considère la matrice élémentaire
- $E_{j1} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$
- . Montrer que
- $AE_{j1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- est la
- j
- ème colonne de
- A
- , c'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AE_{j1})_{i1} = A_{ij}.$$

3. Soit
- $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
- . On considère la matrice élémentaire
- $E_{1i} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$
- . Montrer que
- $E_{1i}A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$
- est la
- i
- ème ligne de
- A
- , c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad (E_{1i}A)_{1j} = A_{ij}.$$

4. Soit
- $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- . Dédurre de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} A = B &\iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad AE_{j1} = BE_{j1} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad E_{1i}A = E_{1i}B. \end{aligned}$$

5.4 Matrices carrées

On a défini les matrices comme étant des tableaux de nombres, ce qui permet une représentation rectangulaire. En géométrie, on peut s'intéresser à un cas particulier des rectangles : dans le cas où tous les côtés sont de même longueur, on parle de carrés. On peut bien sûr faire la même chose avec les matrices.

Définition 5.4.1. On dit qu'une matrice de taille $n \times p$ est carrée si $n = p$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle coefficients diagonaux de A les coefficients A_{ii} pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On peut d'ores-et-déjà établir un premier résultat autour de ces matrices, qui n'est finalement qu'une conséquence directe de la définition.

Proposition 5.4.2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit matriciel est une opération interne :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la [Définition 5.3.1](#). ■

5.4.1 Symétries

Proposition 5.4.3. L'application transposée est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'application transposée est bien une fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a montré dans la [Proposition 5.2.5](#) qu'elle est linéaire, donc il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, la [Proposition 5.1.8](#) implique que composer la transposée avec elle-même donne l'identité, ce qui est la définition d'une symétrie. ■

Définition 5.4.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est :

- symétrique si $A^T = A$,
- antisymétrique si $A^T = -A$.

Exemple 5.4.5. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est symétrique, tandis que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique.

Exercice 5.2

[Solution page 158.](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A est antisymétrique. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls.

Proposition 5.4.6. Soient

$$\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A = A^T\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^T = -A\}.$$

Alors :

- (i) $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- (ii) $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On note

$$\begin{aligned} s: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T. \end{aligned}$$

On a montré dans la [Proposition 5.4.3](#) que s est une symétrie. On remarque que $\mathcal{S} = \ker(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$, donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De même, $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S} = \ker(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. On applique alors le [Corollaire 4.2.20](#) :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(s - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \ker(s + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

■

5.4.2 Trace

Définition 5.4.7. On appelle trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\text{tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) := \sum_{k=1}^n A_{kk}.$$

Proposition 5.4.8. L'application trace

$$\begin{aligned} \text{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \text{tr}(A) \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

Démonstration. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{k=1}^n (\lambda A + B)_{kk} = \sum_{k=1}^n (\lambda A_{kk} + B_{kk}) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n A_{kk} + \sum_{k=1}^n B_{kk} = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B). \end{aligned}$$

■

Proposition 5.4.9. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Démonstration. On effectue tout simplement le calcul :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_{kl} B_{lk} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n A_{kl} B_{lk} \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n B_{lk} A_{kl} = \sum_{l=1}^p (BA)_{ll} = \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

■

5.4.3 Matrices triangulaires

Définition 5.4.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est :

— triangulaire supérieure si :

$$\forall i > j, \quad A_{ij} = 0,$$

— triangulaire inférieure si :

$$\forall i < j, \quad A_{ij} = 0,$$

— diagonale si :

$$\forall i \neq j, \quad A_{ij} = 0.$$

Schématiquement, on obtient les représentations suivantes :

$$A_{\text{tri sup}} = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix}, A_{\text{tri inf}} = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix}, A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{pmatrix},$$

où $\star$ désigne un coefficient non nécessairement nul.

Remarque 5.4.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En jouant avec la définition, on montre assez facilement que :

$$A \text{ est diagonale} \iff A^T \text{ est diagonale}$$

ainsi que :

$$A \text{ est triangulaire supérieure} \iff A^T \text{ est triangulaire inférieure.}$$

Proposition 5.4.12. Les ensembles

$$\begin{aligned} &\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \text{ est triangulaire supérieure}\}, \\ &\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \text{ est triangulaire inférieure}\}, \end{aligned}$$

et

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \text{ est diagonale}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On remarque que $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ peut être vue comme triangulaire inférieure, triangulaire supérieure, et même diagonale, donc la matrice nulle appartient à ces trois ensembles.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$(\lambda A + B)_{ij} = (\lambda A)_{ij} + B_{ij} = \lambda A_{ij} + B_{ij}.$$

Supposons que A et B sont triangulaires supérieures. Pour $i > j$, $A_{ij} = B_{ij} = 0$, donc :

$$(\lambda A + B)_{ij} = \lambda \cdot 0 + 0 = 0,$$

et ainsi $(\lambda A + B)$ est triangulaire supérieure. On procède de la même manière pour les autres ensembles. ■

Exercice 5.3

[Solution page 159.](#)

Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C := AB$ leur produit.

1. On suppose que A et B sont diagonales. Montrer que C est une matrice diagonale et que ses coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux de A et B :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad C_{ii} = A_{ii}B_{ii}. \quad (5.1)$$

2. On suppose que A et B sont triangulaires supérieures. Montrer que C est triangulaire supérieure et que la propriété (5.1) est encore vraie.
3. Même question pour des matrices triangulaires inférieures.

5.4.4 Puissances d'une matrice

Définition 5.4.13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit les puissances de A par récurrence. En posant $A^0 := I_n$, on note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} := A^k A.$$

On peut vérifier plutôt facilement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

ainsi que :

$$\forall (k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad A^{k+p} = A^k A^p,$$

ou encore :

$$\forall (k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (A^k)^p = A^{kp}.$$

Définition 5.4.14. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. En écrivant

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

on définit l'application du polynôme P à la matrice A par :

$$P(A) := \sum_{k=0}^d a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 5.4

[Solution page 160.](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\} / P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Définition 5.4.15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est nilpotente si :

$$\exists k \in \mathbb{N} / A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Exemple 5.4.16. La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. En effet, on peut calculer :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Intéressons-nous maintenant à une formule bien connue dans le monde des nombres réels. On considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons $(A + B)^2$:

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A(A + B) + B(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 &\iff A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\iff AB + BA = AB + AB \\ &\iff BA = AB.\end{aligned}$$

Définition 5.4.17. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B commutent si $AB = BA$.

Proposition 5.4.18. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A et B commutent. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par définition :

$$(A + B)^0 = I_n,$$

et la formule s'écrit :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^0 = 1 \cdot I_n I_n = I_n,$$

donc l'égalité est vraie au rang $p = 0$.

Hérédité. Supposons la formule vraie à un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}(A + B)^{p+1} &= (A + B)^p (A + B) \\ &= (A + B)^p A + (A + B)^p B \\ &= \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \right) A + \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \right) B \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} A + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} B.\end{aligned}$$

Par définition de la puissance d'une matrice, on a d'une part :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad A^k B^{p-k} B = A^k B^{p+1-k}.$$

D'autre part, comme A et B commutent :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad A^k B^{p-k} A = A^{k+1} B^{p-k}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 (A + B)^{p+1} &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{k+1} B^{p-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p+1-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} A^k B^{p+1-k} + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p+1-k} \\
 &= \binom{p}{0} A^0 B^{p+1} + \sum_{k=1}^p \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) A^k B^{p+1-k} + \binom{p}{p} A^{p+1} B^0.
 \end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k},$$

et on peut toujours écrire :

$$\binom{p}{0} = \binom{p+1}{0} \quad \text{et} \quad \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1},$$

donc on peut rassembler le tout pour obtenir :

$$(A + B)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} A^k B^{p+1-k},$$

et ainsi la formule est vraie au rang $p + 1$. ■

Remarque 5.4.19. On a déjà vu qu'il s'agissait d'une équivalence dans le cas $p = 2$: si $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, alors on peut en déduire que A et B commutent. Ce n'est cependant pas vrai dans tous les cas. Par exemple, dans les cas $p = 0$ et $p = 1$, la formule est toujours vraie, que A et B commutent ou non :

$$(A + B)^0 = I_n \quad \text{et} \quad (A + B)^1 = A + B.$$

On ne peut donc rien conclure quant à la commutativité des matrices. Pour d'autres valeurs de p , cette non équivalence peut persister. On peut par exemple construire, relativement facilement, un contre-exemple pour le cas $p = 3$, c'est-à-dire exhiber un couple de matrices pour lesquelles on a

$$(A + B)^3 = B^3 + 3AB^2 + 3A^2B + A^3$$

sans pour autant qu'elles ne commutent. Considérons par exemple les matrices nilpotentes suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans mal que $A^2 = B^2 = 0$. Ainsi :

$$B^3 + 3AB^2 + 3A^2B + A^3 = 0.$$

D'autre part :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et un simple calcul permet de montrer que $(A + B)^3 = 0$, donc la formule est vraie. Pourtant :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = BA,$$

donc A et B ne commutent pas.

L'exercice suivant permet de se rendre compte qu'il n'y a que très peu de matrices qui commutent avec toutes les autres : en effet, seules les multiples de l'identité vérifient cette propriété.

Exercice 5.5

[Solution page 160.](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}/A = \lambda I_n).$$

5.4.5 Inverse d'une matrice

Définition 5.4.20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$:

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/AB = BA = I_n\}.$$

Proposition 5.4.21. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\exists ! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/AB = BA = I_n.$$

Démonstration. Soient B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB_1 = B_1A = I_n \quad \text{et} \quad AB_2 = B_2A = I_n.$$

Alors :

$$B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2.$$

■

Définition 5.4.22. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On note A^{-1} l'unique matrice telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

La matrice A^{-1} est appelée inverse de A .

Exemple 5.4.23. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

donc $B = A^{-1}$.

Exemple 5.4.24. Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors A n'est pas inversible :

$$\forall B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{12} & 0 \\ b_{21} + 2b_{22} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.4.25. La matrice identité est inversible et est sa propre inverse :

$$I_n I_n = I_n.$$

Remarque 5.4.26. La matrice nulle n'est pas inversible :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad B 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \neq I_n.$$

En particulier, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.4.27. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. C'est une autre façon de lire la définition de A^{-1} :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

d'où le résultat. ■

Proposition 5.4.28. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$. Alors $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. Il suffit d'introduire l'identité au bon endroit :

$$I_n = AA^{-1} = AI_nA^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}),$$

et un calcul similaire permet d'obtenir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. ■

Proposition 5.4.29. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, comme $A^0 = I_n$, le résultat est immédiat. Supposons qu'il soit vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors $A^k \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on peut appliquer la Proposition 5.4.28 : la matrice $A^{k+1} = A^k A$ est inversible d'inverse $A^{-1}(A^k)^{-1}$. Par hypothèse de récurrence, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, donc l'inverse de A^{k+1} s'écrit $A^{-1}(A^{-1})^k = (A^{-1})^{k+1}$, et le résultat est démontré. ■

Notation 5.4.30. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. On note

$$A^{-k} := (A^{-1})^k.$$

Proposition 5.4.31. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lambda A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. On peut écrire :

$$I_n = (\lambda\lambda^{-1})I_n = (\lambda\lambda^{-1})AA^{-1} = (\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}),$$

et il suffit de faire la même chose de l'autre côté pour obtenir le résultat. ■

Proposition 5.4.32. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $A^T \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Démonstration. La transposée de l'identité est elle-même, donc :

$$I_n = I_n^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T,$$

et un calcul similaire donne l'autre égalité nécessaire à la définition, d'où le résultat. ■

Proposition 5.4.33. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $(B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$AB = AC \implies B = C.$$

De même, pour $(B, C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$BA = CA \implies B = C.$$

Démonstration. On montre la première implication, la seconde s'obtenant de la même façon. Comme A^{-1} existe, on peut multiplier l'égalité à gauche pour obtenir :

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC).$$

D'une part :

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_n B = B.$$

D'autre part :

$$A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = I_n C = C,$$

d'où $B = C$. ■

Exercice 5.6

[Solution page 161.](#)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est diagonale. Montrer que A^{-1} est une matrice diagonale et que ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{ii} \neq 0 \text{ et } (A^{-1})_{ii} = A_{ii}^{-1}. \quad (5.2)$$

2. On suppose que A est triangulaire supérieure. Montrer que A^{-1} est triangulaire supérieure et que la propriété (5.2) est encore vraie.
3. Même question pour une matrice triangulaire inférieure.

5.5 Application linéaire associée

À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut associer l'application f_A définie par :

$$\begin{aligned} f_A: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ U &\mapsto AU \end{aligned}$$

qui possède quelques propriétés intéressantes, comme nous allons le voir par la suite.

Proposition 5.5.1. L'application f_A est linéaire.

Démonstration. Soient $(U, V) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f_A(\lambda U + V) = A(\lambda U + V) = \lambda(AU) + AV = \lambda f_A(U) + f_A(V).$$

■

Remarque 5.5.2. Il ne s'agit bien sûr pas de la seule application que l'on peut définir à partir de A . On aurait très bien pu également définir une application $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. Se restreindre aux vecteurs colonnes n'est cependant pas une perte de généralité : une application définie sur des « vraies » matrices peut être vue comme une concaténation d'un nombre suffisant d'applications f_A .

Théorème 5.5.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si l'application f_A associée à A est bijective.

Démonstration. Supposons A inversible. Soit $U \in \ker(f_A)$. Par définition :

$$AU = f_A(U) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Comme A^{-1} existe, on peut multiplier cette égalité à gauche par celle-ci :

$$A^{-1}(AU) = A^{-1}0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Or, $A^{-1}(AU) = (A^{-1}A)U = I_n U = U$, ce qui montre que $\ker(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Ainsi, f_A est injective. Comme $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on en déduit (par le [Corollaire 4.3.11](#)) que f_A est bijective.

Réciproquement, supposons que f_A est bijective. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la matrice élémentaire colonne $E_{i1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme f_A est bijective, elle est en particulier surjective et on trouve ainsi $B_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $f_A(B_i) = E_{i1}$. On définit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la concaténation des colonnes $B_1, B_2, \dots, B_n$, soit :

$$B := \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AB)E_{i1} = A(BE_{i1}) = AB_i = f_A(B_i) = E_{i1} = I_n E_{i1},$$

d'où (voir par exemple l'[Exercice 5.1](#)) :

$$AB = I_n.$$

En multipliant cette égalité à droite par A , on obtient :

$$ABA = A,$$

soit :

$$A(BA - I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})},$$

d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = A(BA - I_n)E_{i1} = A((BA - I_n)E_{i1}) = f_A((BA - I_n)E_{i1}).$$

Comme f_A est bijective, elle est en particulier injective et ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = (BA - I_n)E_{i1} = (BA)E_{i1} - E_{i1},$$

qui montre que :

$$BA = I_n,$$

donc A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B$. ■

On peut noter dans cette preuve un fait intéressant : on construit d'abord une matrice B telle que $AB = I_n$, et on déduit ensuite que $BA = I_n$ également. Il se trouve que cette équivalence entre existence d'une « inverse à gauche » et existence d'une « inverse à droite » est toujours vraie.

Proposition 5.5.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AB = I_n$.
- (ii) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / BA = I_n$.

Si ces assertions sont vraies, alors A est inversible et la matrice B est la même dans les deux cas, égale à A^{-1} .

Démonstration. (i) $\implies$ (ii). Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$V = I_n V = (AB)V = A(BV) = f_A(BV)$$

et ainsi $V \in \text{Im}(f_A)$, donc f_A est surjective, donc bijective. On applique alors le [Théorème 5.5.3](#) pour obtenir que A est inversible. Ainsi, on peut multiplier l'égalité $AB = I_n$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $B = A^{-1}$.

(ii) $\implies$ (i). Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$. Soit $U \in \ker(f_A)$. Par définition :

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = f_A(U) = AU.$$

Ainsi :

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = B0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = B(AU) = (BA)U = I_n U = U.$$

Ainsi f_A est injective, donc bijective et on déduit du [Théorème 5.5.3](#) que A est inversible. Ainsi, on peut multiplier l'égalité $BA = I_n$ à droite par A^{-1} pour obtenir $B = A^{-1}$. ■

Théorème 5.5.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A et $L_1,$

$L_2, \dots, L_n$ les lignes de A :

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) A est inversible.
- (ii) la famille $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- (iii) la famille $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Démonstration. (i) $\iff$ (ii). On considère la famille de matrices colonnes élémentaires $(E_{11}, \dots, E_{n1})$, qui forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (voir la Proposition 5.2.4). On remarque (en utilisant par exemple l'Exercice 5.1) que :

$$(f_A(E_{11}), \dots, f_A(E_{n1})) = (AE_{11}, \dots, AE_{n1}) = (C_1, \dots, C_n).$$

Par le Théorème 5.5.3, on a :

$$A \text{ inversible} \iff f_A \text{ bijective.}$$

Appliquons alors le Corollaire 4.3.13 :

$$f_A \text{ bijective} \iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

(i) $\iff$ (iii). On applique l'équivalence précédente à la matrice A^T . ■

5.6 Systèmes linéaires

Intéressons-nous au système linéaire suivant, constitué de n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = y_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = y_n. \end{cases} \quad (\mathcal{S}_A)$$

On définit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),$$

ainsi que les vecteurs colonnes

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

de sorte que :

$$(\mathcal{S}_A) \iff AX = Y.$$

Exemple 5.6.1. Le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$$

est équivalent à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.6.2. Si l'on tentera de l'éviter au maximum dans ce cours, un abus de notation extrêmement commun consiste à dire que X et Y sont des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ plutôt que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il est tout à fait possible de formaliser cet abus de notation pour qu'il devienne « légal ». En effet, les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont isomorphes entre eux (de manière plutôt évidente), et on peut ainsi facilement définir le produit matrice-vecteur à partir du produit matriciel.

Rappelons que nous pouvons associer à la matrice A l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ U &\mapsto AU \end{aligned}$$

de sorte que notre système se réécrit une nouvelle fois :

$$(\mathcal{S}_A) \iff f_A(X) = Y.$$

Dire que le système $(\mathcal{S}_A)$ admet une solution signifie que l'on peut trouver des réels $x_1, x_2, \dots, x_p$ satisfaisant le système pour $y_1, y_2, \dots, y_n$ fixés. De manière équivalente, cela revient à se demander s'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $f_A(X) = Y$, où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est fixé. Directement, on en déduit qu'une telle solution ne peut exister que si $Y \in \text{Im}(f_A)$. Une conséquence de la linéarité de f_A est que, si celle-ci est injective, alors la solution, si elle existe, est unique. En effet, pour X_1 et X_2 deux solutions, on a par définition :

$$f_A(X_1) = Y \quad \text{et} \quad f_A(X_2) = Y,$$

donc :

$$f_A(X_1 - X_2) = 0.$$

Autrement dit, $X_1 - X_2 \in \ker(f_A)$: si $\ker(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\}$, alors $X_1 = X_2$.

Remarque 5.6.3. Si f_A n'est pas injective, et si le système admet une solution $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors le système admet une infinité de solutions. En effet, pour tout $X_0 \in \ker(f_A)$:

$$f_A(X + X_0) = f_A(X) + f_A(X_0) = Y + 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = Y,$$

donc $X + X_0$ est aussi une solution.

Souvent, quand on s'intéresse à un système linéaire, on recherche plutôt des propriétés sur le membre de gauche : on souhaite par exemple savoir si le système admet une unique solution pour tous les seconds membres possibles. C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 5.6.4. (i) Le système $(\mathcal{S}_A)$ admet au plus une solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si f_A est injective.
(ii) Le système $(\mathcal{S}_A)$ admet au moins une solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si f_A est surjective.
(iii) Le système $(\mathcal{S}_A)$ admet exactement une solution pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si f_A est bijective.

Démonstration. On a déjà montré que résoudre le système $(\mathcal{S}_A)$ était équivalent à trouver $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $f_A(X) = Y$. Autrement dit, ce résultat n'est qu'une reformulation de la définition d'injectivité, surjectivité et bijectivité. ■

C'est le bon moment pour rappeler que f_A est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies : on peut donc appliquer le [Corollaire 4.3.10](#). Plus précisément, c'est la contraposée de ce résultat qui va nous intéresser. Si $n < p$, alors f_A n'est pas injective, et il existe alors $X_0 \in \ker(f_A)$ tel que $X_0 \neq 0$. Dans ce cas, si le système $(\mathcal{S}_A)$ admet une solution X , alors il en admet une infinité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_A(X + \lambda X_0) = Y.$$

Concrètement, cela se traduit par le fait qu'il y a strictement plus d'inconnues que d'équations. Si, au contraire, il y a strictement plus d'équations que d'inconnues, alors $n > p$ et, dans ce cas, f_A n'est pas surjective : il existe donc des vecteurs Y pour lesquels le système $(\mathcal{S}_A)$ n'admet aucune solution.

Remarque 5.6.5. Attention, avoir $n = p$ est une condition nécessaire à l'existence d'une unique solution, mais ce n'est pas une condition suffisante !

5.7 Calcul de l'inverse

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite calculer A^{-1} . Partant de

$$AA^{-1} = I_n,$$

on utilise le résultat de l'[Exercice 5.1](#) qui nous dit que cette égalité est équivalente à :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AA^{-1})E_{j1} = I_n E_{j1} = E_{j1},$$

où $E_{j1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AA^{-1})E_{j1} = A(A^{-1}E_{j1}).$$

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A^{-1} , on obtient alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad AC_j = E_{j1}.$$

Ainsi, calculer l'inverse de A^{-1} est équivalent au calcul de ses n colonnes, chacune étant solution d'un système linéaire défini par la matrice A .

Pour y voir un peu plus clair, rien ne vaut un petit exemple. Considérons la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit C_1 la première colonne de A^{-1} . Alors :

$$AC_1 = E_{11}.$$

En notant

$$C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Réolvons ce système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 & (2L_1) \\ -2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -2 & (L_2 - L_1) \\ x_2 - x_3 = -2 & (L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -2 \\ -x_3 = -2 & (2L_3 - L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

ce dernier système pouvant être résolu par « remontée » : la dernière équation permet d'obtenir la valeur de x_3 , qui peut alors être remontée dans la seconde équation qui donnera la valeur de x_2 , et on pourra alors utiliser la première équation pour récupérer x_1 . On obtient :

$$x_3 = 2, \quad \text{puis } x_2 = 0, \quad \text{puis } x_1 = 1,$$

et ainsi :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En notant

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la seconde colonne de A^{-1} , on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les mêmes étapes que pour résoudre le premier système, on obtient :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la dernière colonne C_3 s'obtient en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui mène à :

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a donc obtenu :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En y regardant de plus près, on se rend compte que la résolution de ces trois systèmes se fait avec exactement les mêmes étapes. Bien sûr, les valeurs dans le second membre changent, mais on transforme le membre de gauche avec toujours les mêmes opérations. Une manière de résumer cela consiste à écrire, côte à côte, la matrice et la matrice identité.

En effectuant des opérations sur les lignes, on cherche alors à « ramener » l'identité à gauche. Sur l'exemple précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2/2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
&\xleftrightarrow[L_1 \leftarrow -L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

5.8 Rang d'une matrice

Définition 5.8.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang de la matrice A le rang de l'application linéaire f_A associée :

$$\text{rang}(A) := \text{rang}(f_A).$$

Exemple 5.8.2. Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
f_A: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\
X &\mapsto AX
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}
 \forall X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f_A(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} \\
 &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\text{Im}(f_A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

donc :

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A)) = 1.$$

Proposition 5.8.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $(C_1, \dots, C_p) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^p$ les colonnes de A . Alors :

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{vect}((C_1, \dots, C_p))).$$

Démonstration. La famille $(E_{11}, \dots, E_{p1})$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi (voir [Proposition 4.3.4](#)) :

$$\text{Im}(f_A) = \text{vect}((f_A(E_{11}), \dots, f_A(E_{p1}))).$$

Or :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f_A(E_{j1}) = AE_{j1} = C_j,$$

d'où le résultat. ■

Une manière d'interpréter ce résultat est que le rang d'une matrice correspond au nombre de colonnes linéairement indépendantes de celle-ci.

Exercice 5.7

[Solution page 162.](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\text{rang}(A) = 0 \iff A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}.$$

Proposition 5.8.4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T A)$.

Démonstration. Montrons que $\ker(f_A) = \ker(f_{A^T A})$. Soit pour cela $X \in \ker(f_A)$. Alors :

$$AX = f_A(X) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

On en déduit :

$$f_{A^T A}(X) = (A^T A)X = A^T(AX) = A^T 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})},$$

donc $X \in \ker(f_{A^T A})$. Réciproquement, soit $X \in \ker(f_{A^T A})$. Alors :

$$(A^T A)X = f_{A^T A}(X) = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi :

$$X^T(A^T A)X = X^T 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})}.$$

En posant $Y := AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a obtenu :

$$Y^T Y = (AX)^T(AX) = (X^T A^T)(AX) = 0_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})}.$$

Autrement dit :

$$0 = (0_{\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})})_{11} = (Y^T Y)_{11} = \sum_{k=1}^n (Y^T)_{1k} Y_{k1} = \sum_{k=1}^n Y_{k1}^2.$$

On en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Y_{k1} = 0,$$

soit $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = Y = AX = f_A(X)$, donc $X \in \ker(f_A)$.

Conclusion. Appliquons le théorème du rang ([Théorème 4.3.9](#)) à $f_{A^T A}: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$\text{rang}(f_{A^T A}) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f_{A^T A})) = p - \dim(\ker(f_A)).$$

Or, si on applique ce même théorème à $f_A: \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve :

$$\text{rang}(f_A) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f_A)) = p - \dim(\ker(f_A)),$$

d'où :

$$\text{rang}(A^T A) = \text{rang}(f_{A^T A}) = \text{rang}(f_A) = \text{rang}(A).$$

■

Théorème 5.8.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Démonstration. Soit $Y \in \text{Im}(f_{A^T A})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $f_{A^T A}(X) = Y$. Alors :

$$Y = (A^T A)X = A^T (AX) \in \text{Im}(f_{A^T}).$$

Donc $\text{Im}(f_{A^T A}) \subset \text{Im}(f_{A^T})$ et ainsi :

$$\text{rang}(A^T A) = \text{rang}(f_{A^T A}) \leq \text{rang}(f_{A^T}) = \text{rang}(A^T).$$

On applique alors la [Proposition 5.8.4](#) :

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T A) \leq \text{rang}(A^T).$$

Avec le même raisonnement appliqué à A^T , on obtient l'inégalité inverse, d'où l'égalité. ■

Corollaire 5.8.6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $(L_1, \dots, L_n) \in (\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R}))^n$ les lignes de A . Alors :

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{vect}((L_1, \dots, L_n))).$$

Démonstration. On applique le [Théorème 5.8.5](#) : $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$. Il suffit alors d'appliquer la [Proposition 5.8.3](#) à A^T , puisque les colonnes de A^T sont les lignes de A . ■

Remarque 5.8.7. Techniquement, dire que « les colonnes de A^T sont les lignes de A » n'est pas tout à fait exact : les lignes de A sont dans $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ tandis que les colonnes de A^T sont dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On peut cependant exhiber un isomorphisme entre ces deux espaces plutôt facilement.

Autrement dit, le rang d'une matrice correspond aussi au nombre de lignes linéairement indépendantes de celle-ci. Une conséquence directe de ce qui a été vu jusqu'ici est le résultat suivant.

Corollaire 5.8.8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang}(A) \leq \min(n, p)$.

Démonstration. En notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes, on a d'une part

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{vect}((C_1, \dots, C_p)))$$

par la [Proposition 5.8.3](#), donc $\text{rang}(A) \leq p$. D'autre part :

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{vect}((L_1, \dots, L_n)))$$

par le [Corollaire 5.8.6](#), donc $\text{rang}(A) \leq n$. ■

Définition 5.8.9. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est de rang maximal si $\text{rang}(A) = \min(n, p)$.

Proposition 5.8.10. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ son application linéaire associée. Alors :

- (i) f_A est injective si et seulement si $\text{rang}(A) = p$;
- (ii) f_A est surjective si et seulement si $\text{rang}(A) = n$;
- (iii) si $n = p$, alors f_A est bijective si et seulement si $\text{rang}(A) = n$.

Démonstration. (i) Appliquons le théorème du rang ([Théorème 4.3.9](#)) à f_A :

$$\dim(\ker(f_A)) + \text{rang}(f_A) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})).$$

Or, $\dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) = p$ et $\text{rang}(f_A) = \text{rang}(A)$, donc :

$$\text{rang}(A) = p - \dim(\ker(f_A)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) = p &\iff \dim(\ker(f_A)) = 0 \\ &\iff \ker(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}\} \\ &\iff f_A \text{ est injective.} \end{aligned}$$

(ii) C'est une conséquence du [Corollaire 3.4.16](#). En effet :

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) = n &\iff \text{rang}(f_A) = n \\ &\iff \dim(\text{Im}(f_A)) = n \\ &\iff \text{Im}(f_A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\iff f_A \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

(iii) C'est une conséquence directe des deux premiers points. ■

Proposition 5.8.11. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)).$$

Démonstration. Soit $Y \in \text{Im}(f_{AB})$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$Y = (AB)X = A(BX) \in \text{Im}(f_A),$$

donc $\text{Im}(f_{AB}) \subset \text{Im}(f_A)$, d'où $\dim(\text{Im}(f_{AB})) \leq \dim(\text{Im}(f_A))$, c'est-à-dire :

$$\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A).$$

Comme $(AB)^T = B^T A^T$, on montre de la même manière que :

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}((AB)^T) \leq \text{rang}(B^T) = \text{rang}(B),$$

d'où le résultat. ■

Proposition 5.8.12. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Supposons que $\text{rang}(B) = p$. Alors $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$.

Démonstration. Soit $Y \in \text{Im}(f_{AB})$. Alors il existe $Z \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$Y = (AB)Z = A(BZ) \in \text{Im}(f_A),$$

donc $\text{Im}(f_{AB}) \subset \text{Im}(f_A)$.

Soit maintenant $Y \in \text{Im}(f_A)$. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$. Comme $\text{rang}(B) = p$, la Proposition 5.8.10 implique que f_B est surjective, donc il existe $Z \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que $BZ = X$. Ainsi :

$$Y = AX = A(BZ) = (AB)Z \in \text{Im}(f_{AB}),$$

donc $\text{Im}(f_A) \subset \text{Im}(f_{AB})$.

On a ainsi montré $\text{Im}(f_A) = \text{Im}(f_{AB})$, ce qui donne :

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(f_A) = \dim(\text{Im}(f_A)) = \dim(\text{Im}(f_{AB})) = \text{rang}(f_{AB}) = \text{rang}(AB).$$

■

Proposition 5.8.13. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Supposons que $\text{rang}(A) = p$. Alors $\text{rang}(AB) = \text{rang}(B)$.

Démonstration. Soit $Z \in \ker(f_B)$. Donc $BZ = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, et ainsi :

$$(AB)Z = A(BZ) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})},$$

donc $Z \in \ker(f_{AB})$ et $\ker(f_B) \subset \ker(f_{AB})$.

Soit maintenant $Z \in \ker(f_{AB})$, c'est-à-dire :

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = (AB)Z = A(BZ),$$

donc $BZ \in \ker(f_A)$. Or, comme $\text{rang}(A) = p$, par la Proposition 5.8.10, f_A est injective et ainsi $BZ = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, donc $Z \in \ker(f_B)$.

On a ainsi montré $\ker(f_B) = \ker(f_{AB})$. En appliquant le théorème du rang (Théorème 4.3.9) à f_{AB} et f_B , on obtient ainsi :

$$\dim(\ker(f_{AB})) + \text{rang}(AB) = q = \dim(\ker(f_B)) + \text{rang}(B),$$

d'où l'égalité recherchée.

■

5.9 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 5.1

1. a. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b. On obtient :

$$(1 \ 2 \ 3), \quad (4 \ 5 \ 6).$$

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$(AE_{j1})_{i1} = \sum_{k=1}^p A_{ik}(E_{j1})_{k1} = \sum_{k=1}^p A_{ik}\delta_{jk} = A_{ij}.$$

3. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors :

$$(E_{1i}A)_{1j} = \sum_{k=1}^n (E_{1i})_{1k}A_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}.$$

4. Comme A et B sont de même taille, il suffit de comparer leurs coefficients :

$$A = B \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, A_{ij} = B_{ij}.$$

D'une part, via la question 2. :

$$\begin{aligned} A = B &\iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{ij} = B_{ij} \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (AE_{j1})_{i1} = (BE_{j1})_{i1} \\ &\iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, AE_{j1} = BE_{j1}. \end{aligned}$$

D'autre part, via la question 3. :

$$\begin{aligned} A = B &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_{ij} = B_{ij} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (E_{1i}A)_{1j} = (E_{1i}B)_{1j} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{1i}A = E_{1i}B. \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 5.2

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$A_{ii} = (A^T)_{ii} = -A_{ii}$$

par définition de la transposée, puis par antisymétrie. On obtient $A_{ii} = 0$.

Solution de l'Exercice 5.3

1. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

Or, comme A est diagonale :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{ik} = 0 \text{ si } k \neq i.$$

Ainsi :

$$C_{ij} = A_{ii} B_{ij}.$$

Or, B est aussi diagonale, donc si $i \neq j$, $B_{ij} = 0$, donc $C_{ij} = 0$, donc C est diagonale.

Soit maintenant $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En utilisant l'expression précédente, on obtient directement :

$$C_{ii} = A_{ii} B_{ii}.$$

2. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

Or, B est triangulaire supérieure, donc :

$$\forall k > j, \quad B_{kj} = 0,$$

et ainsi :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^j A_{ik} B_{kj}.$$

Si $i > j$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1, j \rrbracket$, $k \leq j < i$, donc $A_{ik} = 0$ car A est triangulaire supérieure, et ainsi $C_{ij} = 0$, donc C est triangulaire supérieure.

Soit maintenant $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^i A_{ik} B_{ki},$$

car B est triangulaire supérieure. Pour $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, $k < i$, donc $A_{ik} = 0$ et ainsi

$$C_{ii} = A_{ii} B_{ii}.$$

3. On peut refaire des calculs similaires à ceux de la question précédente. Sinon, on peut aussi remarquer que, comme A et B sont triangulaires inférieures, A^T et B^T sont triangulaires supérieures et on peut appliquer la question précédente :

$$C^T = (AB)^T = B^T A^T$$

est triangulaire supérieure, donc C est triangulaire inférieure. De plus :

$$\forall i \in \llbracket 1, i \rrbracket, \quad C_{ii} = (C^T)_{ii} = (B^T)_{ii} (A^T)_{ii} = B_{ii} A_{ii} = A_{ii} B_{ii}.$$

Solution de l'Exercice 5.4

On considère la famille

$$\mathcal{P} := \{A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket\}.$$

Cette famille contient $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2 : elle est donc liée. Ainsi, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

En posant

$$P := \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k,$$

on obtient $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Solution de l'Exercice 5.5

Dans un sens, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Alors :

$$AB = (\lambda I_n)B = I_n(\lambda B) = \lambda B = (\lambda B)I_n = B(\lambda I_n) = BA.$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AB = BA.$$

Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On considère $B = E_{k\ell}$ dans l'égalité ci-dessus. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a d'une part :

$$(AB)_{ij} = \sum_{p=1}^n A_{ip}(E_{k\ell})_{pj} = \sum_{p=1}^n A_{ip}\delta_{kp}\delta_{\ell j} = A_{ik}\delta_{j\ell},$$

et d'autre part :

$$(BA)_{ij} = \sum_{p=1}^n (E_{k\ell})_{ip}A_{pj} = \sum_{p=1}^n \delta_{ki}\delta_{\ell p}A_{pj} = A_{\ell j}\delta_{ik}.$$

Comme $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$, on a donc obtenu :

$$A_{ik}\delta_{j\ell} = A_{\ell j}\delta_{ik}.$$

Considérons $i = k$. Alors $\delta_{ik} = 1$ et ainsi :

$$A_{kk}\delta_{j\ell} = A_{\ell j}.$$

Pour $j \neq \ell$, $\delta_{j\ell} = 0$ et ainsi :

$$A_{\ell j} = 0.$$

Pour $j = \ell$, $\delta_{j\ell} = 1$ et on obtient :

$$A_{\ell\ell} = A_{kk}.$$

Pour résumer, A est diagonale et tous ces coefficients diagonaux sont égaux entre eux. En notant $\lambda = A_{11}$, on obtient donc $A = \lambda I_n$.

Solution de l'Exercice 5.6

1. On note $B := A^{-1}$. Alors $AB = I_n$, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{A_{ik}}_{\substack{=0 \\ \text{si } k \neq i}} B_{kj} = A_{ii} B_{ij}.$$

En particulier :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad 1 = A_{ii} B_{ii},$$

ce qui implique :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{ii} \neq 0.$$

On peut alors écrire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad B_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{A_{ii}},$$

ce qui montre que $A^{-1} = B$ est diagonale et que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A^{-1})_{ii} = A_{ii}^{-1}.$$

2. On note $B := A^{-1}$. Alors $BA = I_n$, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \delta_{ij} = (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik} \underbrace{A_{kj}}_{\substack{=0 \\ \text{si } k > j}} = \sum_{k=1}^j B_{ik} A_{kj}.$$

Montrons par récurrence sur $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que :

$$A_{jj} \neq 0, \quad B_{jj} = A_{jj}^{-1}, \quad \text{et } \forall i \in \llbracket j+1, n \rrbracket, B_{ij} = 0.$$

Initialisation. Pour $j = 1$, on part de :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_{i1} = \sum_{k=1}^1 B_{ik} A_{k1} = B_{i1} A_{11}.$$

En particulier, pour $i = 1$:

$$1 = B_{11} A_{11},$$

ce qui montre à la fois que $A_{11} \neq 0$ et $B_{11} = A_{11}^{-1}$. De plus :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad 0 = B_{i1}A_{11},$$

d'où :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad B_{i1} = 0,$$

car $A_{11} \neq 0$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai jusqu'à un certain rang $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \delta_{i+1,j+1} &= \sum_{k=1}^j \underbrace{B_{i+1,k}}_{=0} A_{k,j+1} + B_{i+1,j+1} A_{j+1,j+1} \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= B_{i+1,j+1} A_{j+1,j+1}. \end{aligned}$$

Pour $i = j$, on obtient ainsi :

$$1 = B_{j+1,j+1} A_{j+1,j+1}$$

donc $A_{j+1,j+1} \neq 0$ et $B_{j+1,j+1} = A_{j+1,j+1}^{-1}$. De plus :

$$\forall i \in \llbracket j+1, n-1 \rrbracket, \quad 0 = B_{i+1,j+1} A_{j+1,j+1},$$

donc :

$$\forall i \in \llbracket j+1, n-1 \rrbracket, \quad B_{i+1,j+1} = 0,$$

ce qui termine la preuve.

3. On peut faire un raisonnement similaire à la question précédente, ou on peut réutiliser le résultat. En effet, comme A est triangulaire inférieure, A^T est triangulaire supérieure, donc $(A^T)^{-1}$ est triangulaire supérieure et :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (A^T)_{ii} \neq 0 \text{ et } ((A^T)^{-1})_{ii} = (A^T)_{ii}^{-1}.$$

Or, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, donc on obtient le résultat.

Solution de l'Exercice 5.7

On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A .

Si $A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$, alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad C_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})},$$

d'où $\text{vect}((C_1, \dots, C_p)) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et ainsi $\text{rang}(A) = 0$.

Réciproquement, on procède par contraposée. Supposons que $A \neq 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$. Alors il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $C_j \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi, $\dim(\text{vect}(\{C_j\})) = 1$. Or :

$$\text{vect}(\{C_j\}) \subset \text{vect}((C_1, \dots, C_p)),$$

donc $\text{rang}(A) = \dim(\text{vect}((C_1, \dots, C_p))) \geq \dim(\text{vect}(\{C_j\})) = 1$ et, en particulier, $\text{rang}(A) \neq 0$.

Chapitre 6

Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, E et F désignent deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On fixe $p := \dim(E)$ et $n := \dim(F)$. On se donne $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\tilde{\mathcal{B}} := (v_1, \dots, v_n)$ une base de F . On note c_j , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, et $\tilde{c}_i$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$. Ainsi :

$$\forall u \in E, u = \sum_{j=1}^p c_j(u) \cdot e_j \quad \text{et} \quad \forall v \in F, v = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(v) \cdot v_i.$$

6.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 6.1.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$, notée $M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f)$, la matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \left(M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f) \right)_{ij} = \tilde{c}_i(f(e_j)).$$

En pratique, on construit ces matrices colonne par colonne : par définition, chaque colonne contient les coordonnées, dans la base de l'espace d'arrivée, de l'image d'un vecteur de la base de l'espace de départ. On peut en particulier noter que la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies.

Exemple 6.1.2. On considère $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b) &\mapsto (2a, a + b, 2b). \end{aligned}$$

— On considère la base $\mathcal{B}$ de E et la base $\tilde{\mathcal{B}}$ de F définies par :

$$\mathcal{B} := ((1, 0), (0, 1)) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}} := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

On calcule l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par f , que l'on décompose selon la

base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} f((1, 0)) &= (2, 1, 0) \\ &= 2 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f((0, 1)) &= (0, 1, 2) \\ &= 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— On garde les mêmes espaces et la même application linéaire, mais on change les bases :

$$\mathcal{B}_2 := ((0, 1), (1, 0)) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}}_2 := ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)).$$

On obtient cette fois :

$$\begin{aligned} f((1, 0)) &= (2, 1, 0) \\ &= 1 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (1, 0, 0) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f((0, 1)) &= (0, 1, 2) \\ &= 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1) + 2 \cdot (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— On prend les mêmes et on recommence, avec :

$$\mathcal{B}_3 := ((1, 0), (1, 1)) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}}_3 := ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)).$$

Alors :

$$\begin{aligned} f((1, 0)) &= (2, 1, 0) \\ &= 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (1, 1, 0) + 0 \cdot (1, 1, 1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f((1, 1)) &= (2, 2, 2) \\ &= 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (1, 1, 0) + 2 \cdot (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}_3, \mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.1.3. On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}^3$ avec les bases

$$\mathcal{B} := (1, X, X^2) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}} := ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\mapsto (P(0), P(1), P(2)) \end{aligned}$$

dont on vérifie la linéarité aisément. Pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on note $P_k(X) := X^k$, de sorte que

$$\mathcal{B} = (P_k)_{k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket}.$$

Calculons les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et exprimons ces images dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} f(P_0) &= (P_0(0), P_0(1), P_0(2)) \\ &= (1, 1, 1) \\ &= 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1), \\ f(P_1) &= (P_1(0), P_1(1), P_1(2)) \\ &= (0, 1, 2) \\ &= 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1), \\ f(P_2) &= (P_2(0), P_2(1), P_2(2)) \\ &= (0, 1, 4) \\ &= 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 4 \cdot (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.1.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la connaissance de f est équivalente à la connaissance de $M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f)$.

Démonstration. Par le [Corollaire 4.3.7](#), connaître f est équivalent à connaître $f(e_j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Supposons que l'on connaisse f . En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on connaît $f(e_j)$, que l'on peut décomposer selon la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot v_i.$$

Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}.$$

Réciproquement, si on connaît $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$, alors, par définition :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot v_i,$$

donc on connaît f . ■

6.2 Image d'un vecteur

Proposition 6.2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $u \in E$. On note $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad X_{j1} := c_j(u).$$

On note $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Y_{i1} := \tilde{c}_i(f(u)).$$

Alors :

$$Y = M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f)X.$$

Démonstration. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$Y_{i1} = \tilde{c}_i(f(u)) = \tilde{c}_i \left(f \left(\sum_{j=1}^p c_j(u) \cdot e_j \right) \right).$$

Par linéarité de f , on obtient :

$$Y_{i1} = \tilde{c}_i \left(\sum_{j=1}^p c_j(u) \cdot f(e_j) \right).$$

La linéarité de $\tilde{c}_i$ donne alors :

$$Y_{i1} = \sum_{j=1}^p c_j(u) \tilde{c}_i(f(e_j)).$$

Autrement dit :

$$Y_{i1} = \sum_{j=1}^p \tilde{c}_i(f(e_j)) c_j(u) = \sum_{j=1}^p (M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f))_{ij} X_{j1} = (M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f)X)_{i1}.$$
■

Exemple 6.2.2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit la rotation

$$\begin{aligned} r: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta} z. \end{aligned}$$

On voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, avec pour base $\mathcal{B} := (1, i)$. Calculons l'image de cette base :

$$\begin{aligned} r(1) &= e^{i\theta} \\ &= \cos(\theta) \cdot 1 + \sin(\theta) \cdot i, \\ r(i) &= e^{i\theta} i \\ &= -\sin(\theta) \cdot 1 + \cos(\theta) \cdot i. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'image par r de n'importe quel complexe z peut être calculée en effectuant le produit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}.$$

6.3 Opérations

Proposition 6.3.1. Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f + g) = M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f) + M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(g)$;
- (ii) $M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f)$.

Démonstration. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$:

- (i) $(M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f + g))_{ij} = \tilde{c}_i((f + g)(e_j)) = \tilde{c}_i(f(e_j) + g(e_j)) = \tilde{c}_i(f(e_j)) + \tilde{c}_i(g(e_j)) = (M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f))_{ij} + (M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(g))_{ij}$;
- (ii) $(M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\lambda f))_{ij} = \tilde{c}_i((\lambda f)(e_j)) = \tilde{c}_i(\lambda f(e_j)) = \lambda \tilde{c}_i(f(e_j)) = \lambda (M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f))_{ij}$.

■

Proposition 6.3.2. L'application

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}: \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La Proposition 6.3.1 implique que $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$ est linéaire. Soit $f \in \ker(M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}})$, c'est-à-dire telle que $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$. Soit $u \in E$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad X_{j1} := c_j(u).$$

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad Y_{i1} := \tilde{c}_i(f(u)).$$

On applique la Proposition 6.2.1 :

$$Y = M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f)X = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}X = 0_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{c}_i(f(u)) = 0.$$

On a donc obtenu $f(u) = 0_F$. Comme u est quelconque, cela montre que $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$. Ainsi $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$ est injective. Or :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F) = pn = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})),$$

donc $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$ est bijective. ■

Proposition 6.3.3. Soit G un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\hat{\mathcal{B}}$ une base de G . Alors :

$$M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g)M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f).$$

Démonstration. On note $m := \dim(G)$ et $\hat{c}_k$, $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\hat{\mathcal{B}}$. Pour $(k, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$(M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f))_{kj} = \hat{c}_k((g \circ f)(e_j)) = \hat{c}_k(g(f(e_j))).$$

Comme $f(e_j) \in F$, on peut le décomposer selon la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$(M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f))_{kj} = \hat{c}_k \left(g \left(\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(f(e_j)) \cdot v_i \right) \right).$$

On utilise la linéarité de g :

$$(M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f))_{kj} = \hat{c}_k \left(\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(f(e_j)) \cdot g(v_i) \right),$$

puis la linéarité de $\hat{c}_k$:

$$(M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f))_{kj} = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(f(e_j)) \hat{c}_k(g(v_i)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(g \circ f))_{kj} &= \sum_{i=1}^n \hat{c}_k(g(v_i)) \tilde{c}_i(f(e_j)) = \sum_{i=1}^n (M_{\hat{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{B}}}(g))_{ki} (M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f))_{ij} \\ &= (M_{\hat{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{B}}}(g) M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f))_{kj}. \end{aligned}$$

■

6.4 Endomorphismes et puissances

Dans le cas d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, deux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ de E ont nécessairement le même cardinal égal à $\dim(E) = p$ (voir le [Théorème 3.4.8](#)). Ainsi :

$$M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

Notation 6.4.1. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . On note $M_{\mathcal{B}}(f) := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Remarque 6.4.2. Considérons l'application identité Id_E . Alors $M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p$. Cependant, si $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E différente de $\mathcal{B}$, alors $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(\text{Id}_E) \neq I_p$.

Exemple 6.4.3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère les bases

$$\mathcal{B} := ((1, 0), (0, 1)), \quad \tilde{\mathcal{B}} := ((0, 1), (1, 0)), \quad \hat{\mathcal{B}} := ((1, 0), (1, 1)).$$

Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = M_{\tilde{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = M_{\hat{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \\ M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B},\hat{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_{\hat{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\tilde{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{B}}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6.1[Solution page 174.](#)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Montrer que f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f) = \lambda I_p$.

Proposition 6.4.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$f^k := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}},$$

avec $f^0 := \text{Id}_E$. Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = M_{\mathcal{B}}(f)^k.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Le résultat est trivial pour $k = 0$. Supposons qu'il soit vrai à un certain rang $k \in \mathbb{N}$. On utilise la [Proposition 6.3.3](#) :

$$M_{\mathcal{B}}(f^{k+1}) = M_{\mathcal{B}}(f \circ f^k) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f^k) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^k = M_{\mathcal{B}}(f)^{k+1}.$$

■

Exercice 6.2[Solution page 174.](#)

1. Montrer que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(s)^2 = I_p$.
2. Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(p)^2 = M_{\mathcal{B}}(p)$.

6.5 Matrice d'un isomorphisme

On suppose dans cette section que $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 6.5.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est bijective si et seulement si $M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas :

$$M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f^{-1}) = M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f)^{-1}.$$

Démonstration. Supposons f bijective. Alors f^{-1} existe et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$. Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = M_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f^{-1})M_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(f).$$

Or, $M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p$, donc on a obtenu :

$$I_p = M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(f^{-1})M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f),$$

ce qui montre que $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f)$ est inversible d'inverse $M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(f^{-1})$.

Supposons $M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f)$ inversible. Alors il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $BM_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = I_p$. Soit $g \in \mathcal{L}(F, E)$ définie par :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad g(v_j) := \sum_{i=1}^p B_{ij}e_i.$$

Par définition, on a alors $M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(g) = B$. Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(g)M_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = BM_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}(f) = I_p,$$

donc $g \circ f = \text{Id}_E$. Ainsi, f est bijective de réciproque $f^{-1} = g$. ■

Corollaire 6.5.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

6.6 Changement de base

Dans cette section, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ désignent deux bases de E . On note c_j , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.

Définition 6.6.1. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ la matrice de Id_E , partant de E muni de la base $\mathcal{B}_2$, et arrivant dans E muni de la base $\mathcal{B}_1$, c'est-à-dire $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id}_E)$.

En pratique, comme une matrice de passage n'est autre qu'une matrice d'application linéaire, on construit ces matrices colonne par colonne. L'idée consiste à décomposer, dans la base $\mathcal{B}_1$, les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$, comme l'indique le résultat suivant.

Proposition 6.6.2. On note $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_p)$ et $(C_1, \dots, C_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^p$ les colonnes de $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id}_E)$. Alors :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad (C_k)_{j1} = c_j(v_k).$$

Démonstration. Soit $(k, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. Alors :

$$(C_k)_{j1} = (M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id}_E))_{jk} = c_j(\text{Id}_E(v_k)) = c_j(v_k).$$
■

Exemple 6.6.3. On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ avec les bases

$$\mathcal{B}_1 := (1, X, X^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 := (X - 1, X + 1, X^2).$$

On commence par écrire :

$$\begin{aligned} X - 1 &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2, \\ X + 1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2, \\ X^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.6.4. La matrice $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E)$ est inversible et :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E).$$

Démonstration. On applique la [Proposition 6.5.1](#) : Id_E est bijective de réciproque Id_E . ■

Proposition 6.6.5. Soit $\mathcal{B}_3$ une troisième base de E . Alors :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(\text{Id}_E) = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E) M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(\text{Id}_E).$$

Démonstration. On applique la [Proposition 6.3.3](#) avec $\text{Id}_E = \text{Id}_E \circ \text{Id}_E$. ■

Proposition 6.6.6. On note $\tilde{c}_j$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$. Soit $u \in E$. Soient $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad X_{j1} := c_j(u) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{j1} := \tilde{c}_j(u).$$

Alors :

$$X = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E) \tilde{X}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la [Proposition 6.2.1](#). ■

Proposition 6.6.7. Soient $\tilde{\mathcal{B}}_1$ et $\tilde{\mathcal{B}}_2$ deux bases de F . Alors :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad M_{\tilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{B}_2}(f) = M_{\tilde{\mathcal{B}}_2, \tilde{\mathcal{B}}_1}(\text{Id}_F) M_{\tilde{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_1}(f) M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E).$$

Démonstration. On applique la [Proposition 6.3.3](#) à $f = \text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E$. ■

Corollaire 6.6.8. Soit $P := M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E)$. Alors :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad M_{\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_1}(f) P.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la [Proposition 6.6.7](#) et de la [Proposition 6.6.4](#). ■

Exemple 6.6.9. On considère $E = \mathbb{R}^3$ avec les bases

$$\mathcal{B}_1 := (\underbrace{(1, 0, 0)}_{=:e_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{=:e_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{=:e_3}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 := (\underbrace{(2, 1, 3)}_{=:v_1}, \underbrace{(1, 2, 1)}_{=:v_2}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{=:v_3}).$$

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$s(v_1) := v_1, \quad s(v_2) := v_2, \quad s(v_3) := -v_3.$$

Alors $s^2 = \text{Id}_E$ et ainsi s est une symétrie. De plus :

$$M_{\mathcal{B}_2}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3, \\ v_2 &= 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\ v_3 &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \end{aligned}$$

donc :

$$M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E) = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}_1}(s) &= M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\text{Id}_E) M_{\mathcal{B}_2}(s) M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 12 & 8 & 4 \\ -17 & -6 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.7 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 6.1

Supposons que $f = \lambda \text{Id}_E$. Alors $M_{\mathcal{B}}(f) = \lambda M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \lambda I_p$.

Supposons que $M_{\mathcal{B}}(f) = \lambda I_p$. Soit $u \in E$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad X_{j1} := c_j(u).$$

On note $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad Y_{j1} := c_j(f(u)).$$

On applique la Proposition 6.2.1 :

$$Y = M_{\mathcal{B}}(f)X = (\lambda I_p)X = \lambda X.$$

Autrement dit :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_j(f(u)) = Y_{j1} = \lambda X_{j1} = \lambda c_j(u).$$

On a ainsi obtenu :

$$f(u) = \sum_{j=1}^p c_j(f(u)) \cdot e_j = \sum_{j=1}^p (\lambda c_j(u)) \cdot e_j = \lambda \cdot \sum_{j=1}^p c_j(u) \cdot e_j = \lambda \cdot u,$$

donc $f = \lambda \text{Id}_E$.

Solution de l'Exercice 6.2

1. Supposons que s est une symétrie. Alors $s^2 = \text{Id}_E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(s)^2 = M_{\mathcal{B}}(s^2) = M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p.$$

Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(s)^2 = I_p$. Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(s^2) = M_{\mathcal{B}}(s)^2 = I_p = M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E),$$

donc $s^2 = \text{Id}_E$.

2. Supposons que p est un projecteur. Alors $p^2 = p$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(p)^2 = M_{\mathcal{B}}(p^2) = M_{\mathcal{B}}(p).$$

Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(p^2) = M_{\mathcal{B}}(p)$. Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(p^2) = M_{\mathcal{B}}(p)^2 = M_{\mathcal{B}}(p),$$

donc $p^2 = p$.

Chapitre 7

Déterminant

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, E^n désigne le produit cartésien de n copies de E :

$$E^n := \underbrace{E \times E \times \cdots E}_{n \text{ fois}} = \{(u_1, \dots, u_n) ; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i \in E\}.$$

7.1 Applications n -linéaires

Définition 7.1.1. Soient F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une application

$$L: E^n \rightarrow F$$

est n -linéaire si L est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1}$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ u_i &\mapsto L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

Exemple 7.1.2. Toute application linéaire est une application 1-linéaire.

Exemple 7.1.3. On considère l'application

$$\begin{aligned} L: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB. \end{aligned}$$

Soient $(A_1, A_2, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$L(\lambda A_1 + A_2, B) = (\lambda A_1 + A_2)B = \lambda(A_1 B) + (A_2 B) = \lambda L(A_1, B) + L(A_2, B),$$

donc $A \mapsto L(A, B)$ est linéaire. On montre de la même façon que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, l'application $B \mapsto L(A, B)$ est aussi linéaire. Ainsi, l'application L est 2-linéaire.

Exercice 7.1[Solution page 218.](#)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient L_1 et L_2 deux applications $E^n \rightarrow F$, n -linéaires. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 : E^n &\mapsto F \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto L_1(u_1, \dots, u_n) + L_2(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est n -linéaire.

2. Soit $L : E^n \rightarrow F$ une application n -linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \lambda L : E^n &\mapsto F \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \lambda L(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est n -linéaire.

3. Montrer que l'ensemble des applications n -linéaires entre E^n et F , muni des opérations définies précédemment, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Proposition 7.1.4. Soient F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $L : E^n \rightarrow F$ une application n -linéaire. Alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(u_1, \dots, u_{i-1}, 0_E, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0_F.$$

Démonstration. Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par linéarité par rapport à la i -ème variable, on obtient :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_{i-1}, 0_E, u_{i+1}, \dots, u_n) &= L(u_1, \dots, u_{i-1}, 0 \cdot 0_E, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ &= 0 \cdot L(u_1, \dots, u_{i-1}, 0_E, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ &= 0_F. \end{aligned}$$

■

Définition 7.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une application n -linéaire $E^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une forme n -linéaire.

Exemple 7.1.6. L'application

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &\mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

est une forme 2-linéaire sur $\mathbb{R}^3$. En effet, soient $((x_1, x_2, x_3), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), (y_1, y_2, y_3)) \in$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 L(\lambda(x_1, x_2, x_3) + (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), (y_1, y_2, y_3)) \\
 &= L((\lambda x_1 + \tilde{x}_1, \lambda x_2 + \tilde{x}_2, \lambda x_3 + \tilde{x}_3), (y_1, y_2, y_3)) \\
 &= (\lambda x_1 + \tilde{x}_1)y_1 + (\lambda x_2 + \tilde{x}_2)y_2 + (\lambda x_3 + \tilde{x}_3)y_3 \\
 &= \lambda x_1 y_1 + \tilde{x}_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \tilde{x}_2 y_2 + \lambda x_3 y_3 + \tilde{x}_3 y_3 \\
 &= \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + (\tilde{x}_1 y_1 + \tilde{x}_2 y_2 + \tilde{x}_3 y_3) \\
 &= \lambda L((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) + L((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), (y_1, y_2, y_3)),
 \end{aligned}$$

et on montre de la même façon la linéarité par rapport à la seconde variable.

Définition 7.1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire. On dit que L est alternée si :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / (i \neq j \text{ et } u_i = u_j) \implies L(u_1, \dots, u_n) = 0).$$

Dit de façon un peu moins formelle, une application n -linéaire est alternée si, dès qu'un vecteur est répété, l'image est nulle.

Exemple 7.1.8. L'application

$$\begin{aligned}
 L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1
 \end{aligned}$$

est 2-linéaire. En effet, soient $((x_1, x_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 L(\lambda(x_1, x_2) + (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (y_1, y_2)) &= L((\lambda x_1 + \tilde{x}_1, \lambda x_2 + \tilde{x}_2), (y_1, y_2)) \\
 &= (\lambda x_1 + \tilde{x}_1)y_2 - (\lambda x_2 + \tilde{x}_2)y_1 \\
 &= \lambda x_1 y_2 + \tilde{x}_1 y_2 - \lambda x_2 y_1 - \tilde{x}_2 y_1 \\
 &= \lambda(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (\tilde{x}_1 y_2 - \tilde{x}_2 y_1) \\
 &= \lambda L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + L((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (y_1, y_2))
 \end{aligned}$$

et la linéarité par rapport à la seconde variable se démontre de manière similaire. On peut montrer par ailleurs que c'est une forme alternée. En effet, soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$L((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0.$$

Dans cet exemple, on peut notamment remarquer :

$$L((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -L((x_1, x_2), (y_1, y_2)),$$

qui est en fait une propriété qui se généralise à toute forme n -linéaire alternée, comme l'indique le résultat suivant : en échangeant deux vecteurs, on ne fait que multiplier le

résultat par -1 .

Proposition 7.1.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire. Alors L est alternée si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket, \\ L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ = -L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons L alternée. Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$. On commence par appliquer la définition de forme alternée :

$$L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) = 0$$

car on a utilisé deux fois le vecteur $u_i + u_j$. Ainsi, par linéarité par rapport à la i -ème et la j -ème variables, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &\quad + L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &= \underbrace{L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)}_{=0} \\ &\quad + L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &\quad + L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &\quad + \underbrace{L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)}_{=0}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Réciproquement, soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tel qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, tel que $u_i = u_j =: u$. Alors :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ = L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ = -L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ = -L(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u, u_{j+1}, \dots, u_n), \end{aligned}$$

d'où :

$$L(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u, u_{j+1}, \dots, u_n) = 0,$$

et ainsi L est alternée. ■

Corollaire 7.1.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ = (-1)^{i-1} L(u_i, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le cas $i = 1$ est trivial : on ne touche à rien, $u_i = u_1$ est déjà en première position. Supposons le résultat vrai pour un certain $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On utilise la [Proposition 7.1.9](#) :

$$L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n) = -L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_i, u_{i+2}, \dots, u_n).$$

On note alors :

$$(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n) := (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_i, u_{i+2}, \dots, u_n),$$

de sorte que :

$$L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n) = -L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n).$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence :

$$L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n) = (-1)^{i-1} L(v_i, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n).$$

Autrement dit :

$$L(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n) = (-1)^i L(u_{i+1}, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+2}, \dots, u_n),$$

et ainsi le résultat est démontré. ■

Proposition 7.1.11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire. Alors L est alternée si et seulement si pour toute famille liée $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E , $L(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille liée. Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k = 0_E.$$

En particulier, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_j \neq 0$. On écrit :

$$\lambda_j \cdot u_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k \cdot u_k.$$

Par linéarité de L par rapport à la j -ème variable, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \lambda_j L(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) &= L(u_1, \dots, \lambda_j \cdot u_j, \dots, u_n) \\
 &= L\left(u_1, \dots, -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k \cdot u_k, \dots, u_n\right) \\
 &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k \underbrace{L(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n)}_{=0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

car, à l'intérieur de la somme, chaque u_k est répété deux fois. Comme $\lambda_j \neq 0$, on en déduit $L(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Réciproquement, soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tel qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, tel que $u_i = u_j$. Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée et ainsi $L(u_1, \dots, u_n) = 0$. ■

7.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette section, et dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On note $n := \dim(E)$ et on se donne $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note c_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

7.2.1 Cas de la dimension 2

Dans un premier temps, on suppose que $n = 2$. En particulier, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Commençons par considérer une forme 2-linéaire alternée sur E , que l'on note L . En utilisant la 2-linéarité, on peut calculer, pour tout $(u_1, u_2) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
 L(u_1, u_2) &= L(c_1(u_1)e_1 + c_2(u_1)e_2, u_2) \\
 &= c_1(u_1)L(e_1, u_2) + c_2(u_1)L(e_2, u_2) \\
 &= c_1(u_1)L(e_1, c_1(u_2)e_1 + c_2(u_2)e_2) + c_2(u_1)L(e_2, c_1(u_2)e_1 + c_2(u_2)e_2) \\
 &= c_1(u_1)c_1(u_2)L(e_1, e_1) + c_1(u_1)c_2(u_2)L(e_1, e_2) \\
 &\quad + c_2(u_1)c_1(u_2)L(e_2, e_1) + c_2(u_1)c_2(u_2)L(e_2, e_2).
 \end{aligned}$$

Or, L est alternée, donc $L(e_1, e_1) = L(e_2, e_2) = 0$ et $L(e_2, e_1) = -L(e_1, e_2)$. On a ainsi obtenu :

$$L(u_1, u_2) = (c_1(u_1)c_2(u_2) - c_2(u_1)c_1(u_2))L(e_1, e_2).$$

Définition 7.2.1. On appelle déterminant en base $\mathcal{B}$ l'application

$$\begin{aligned}
 \det_{\mathcal{B}}: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (u_1, u_2) &\mapsto c_1(u_1)c_2(u_2) - c_2(u_1)c_1(u_2).
 \end{aligned}$$

La remarque qui précède constitue alors la preuve du résultat suivant.

Proposition 7.2.2. Soit L une forme 2-linéaire alternée sur E . Alors :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2, \quad L(u_1, u_2) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) L(e_1, e_2).$$

En particulier, la connaissance de $L(e_1, e_2)$ détermine entièrement L .

Proposition 7.2.3. Le déterminant en base $\mathcal{B}$ est l'unique forme 2-linéaire alternée sur E vérifiant

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1.$$

Démonstration. Existence. La linéarité des applications coordonnées implique directement la 2-linéarité du déterminant en base $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, u) = c_1(u)c_2(u) - c_2(u)c_1(u) = 0,$$

donc le déterminant est une forme alternée. Finalement :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = c_1(e_1)c_2(e_2) - c_2(e_1)c_1(e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Unicité. Soit L une forme 2-linéaire alternée sur E telle que $L(e_1, e_2) = 1$. Alors :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2, \quad L(u_1, u_2) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) \underbrace{L(e_1, e_2)}_{=1} = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2),$$

donc $L = \det_{\mathcal{B}}$. ■

Ainsi, le déterminant en base $\mathcal{B}$ est « caché » dans toute forme 2-linéaire alternée sur E . Mais ce n'est pas sa seule propriété.

Proposition 7.2.4. Soit $\tilde{\mathcal{B}} := (u, v)$ une famille de deux vecteurs de E . Alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v) \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, e_2) = 1.$$

Démonstration. Supposons que $\tilde{\mathcal{B}}$ soit une base de E . En particulier, on peut définir le déterminant en base $\tilde{\mathcal{B}}$, qui est une forme 2-linéaire alternée sur E . Ainsi :

$$1 = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(u, v) = \det_{\mathcal{B}}(u, v) \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, e_2),$$

d'où l'on déduit que $\det_{\mathcal{B}}(u, v) \neq 0$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée. Supposons que (u, v) ne soit pas une base de E . Comme cette famille contient deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, elle n'est donc ni libre ni génératrice. En particulier, elle est liée et ainsi $\det_{\mathcal{B}}(u, v) = 0$ car $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme alternée, en conséquence de la [Proposition 7.1.11](#). ■

Exemple 7.2.5. Considérons $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique

$$\mathcal{B} := ((1, 0), (0, 1)).$$

Considérons la famille

$$\tilde{\mathcal{B}} := ((0, 1), (2, 3)).$$

On décompose les vecteurs de cette famille selon la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}(1, 0) &= 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1), \\ (1, 1) &= 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\det_{\mathcal{B}}((0, 1), (2, 3)) = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2 \neq 0,$$

donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Si on considère la famille

$$\mathcal{F} := ((1, 1), (2, 2)),$$

alors :

$$\begin{aligned}(1, 1) &= 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1), \\ (2, 2) &= 2 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1),\end{aligned}$$

donc :

$$\det_{\mathcal{B}}((1, 1), (2, 2)) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0,$$

donc $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ (et ce n'était clairement pas le chemin le plus court pour le montrer!).

7.2.2 Cas de la dimension 3

On suppose maintenant $n = 3$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Comme pour la dimension 2, on se donne une forme 3-linéaire alternée L sur E . Soit $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$. Commençons par utiliser la linéarité de L par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned}L(u_1, u_2, u_3) &= L(c_1(u_1)e_1 + c_2(u_1)e_2 + c_3(u_1)e_3, u_2, u_3) \\ &= c_1(u_1)L(e_1, u_2, u_3) + c_2(u_1)L(e_2, u_2, u_3) + c_3(u_1)L(e_3, u_2, u_3).\end{aligned}$$

Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on utilise la linéarité par rapport à la deuxième variable pour obtenir :

$$\begin{aligned}L(e_i, u_2, u_3) &= L(e_i, c_1(u_2)e_1 + c_2(u_2)e_2 + c_3(u_2)e_3, u_3) \\ &= c_1(u_2)L(e_i, e_1, u_3) + c_2(u_2)L(e_i, e_2, u_3) + c_3(u_2)L(e_i, e_3, u_3).\end{aligned}$$

On peut alors continuer le calcul :

$$\begin{aligned}
 L(u_1, u_2, u_3) &= c_1(u_1)(c_1(u_2) \underbrace{L(e_1, e_1, u_3)}_{=0} + c_2(u_2)L(e_1, e_2, u_3) + c_3(u_2)L(e_1, e_3, u_3)) \\
 &\quad + c_2(u_1)(c_1(u_2)L(e_2, e_1, u_3) + c_2(u_2) \underbrace{L(e_2, e_2, u_3)}_{=0} + c_3(u_2)L(e_2, e_3, u_3)) \\
 &\quad + c_3(u_1)(c_1(u_2)L(e_3, e_1, u_3) + c_2(u_2)L(e_3, e_2, u_3) + c_3(u_2) \underbrace{L(e_3, e_3, u_3)}_{=0}).
 \end{aligned}$$

On peut déjà faire quelques permutations :

$$\begin{aligned}
 L(e_2, e_1, u_3) &= -L(e_1, e_2, u_3), & L(e_2, e_3, u_3) &= -L(e_3, e_2, u_3), \\
 & & L(e_3, e_1, u_3) &= -L(e_1, e_3, u_3).
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 L(u_1, u_2, u_3) &= (c_1(u_1)c_2(u_2) - c_2(u_1)c_1(u_2))L(e_1, e_2, u_3) \\
 &\quad + (c_1(u_1)c_3(u_2) - c_3(u_1)c_1(u_2))L(e_1, e_3, u_3) \\
 &\quad + (c_3(u_1)c_2(u_2) - c_2(u_1)c_3(u_2))L(e_3, e_2, u_3).
 \end{aligned}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la troisième variable et le caractère alterné de L , on obtient :

$$\begin{aligned}
 L(e_1, e_2, u_3) &= c_3(u_3)L(e_1, e_2, e_3), \\
 L(e_1, e_3, u_3) &= c_2(u_3)L(e_1, e_3, e_2) = -c_2(u_3)L(e_1, e_2, e_3), \\
 L(e_3, e_2, u_3) &= c_1(u_3)L(e_3, e_2, e_1) = -c_1(u_3)L(e_1, e_2, e_3).
 \end{aligned}$$

On déduit alors de tous ces calculs la définition et le résultat suivants.

Définition 7.2.6. On appelle déterminant en base $\mathcal{B}$ l'application

$$\begin{aligned}
 \det_{\mathcal{B}}: E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (u_1, u_2, u_3) &\mapsto c_1(u_1)c_2(u_2)c_3(u_3) + c_2(u_1)c_3(u_2)c_1(u_3) + c_3(u_1)c_1(u_2)c_2(u_3) \\
 &\quad - c_3(u_1)c_2(u_2)c_1(u_3) - c_2(u_1)c_1(u_2)c_3(u_3) - c_1(u_1)c_3(u_2)c_2(u_3).
 \end{aligned}$$

Proposition 7.2.7. Soit $L: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme 3-linéaire alternée sur E . Alors, pour tout $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$:

$$L(u_1, u_2, u_3) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)L(e_1, e_2, e_3).$$

Proposition 7.2.8. Le déterminant en base $\mathcal{B}$ est l'unique forme 3-linéaire alternée sur E telle que :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

La preuve de ce résultat est la même qu'en dimension 2, la seule difficulté qui s'ajoute étant de ne pas se perdre dans les indices. On peut légèrement améliorer la lisibilité de la preuve en introduisant les applications

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^3, \quad C_{ijk} : (u_1, u_2, u_3) \mapsto c_i(u_1)c_j(u_2)c_k(u_3),$$

et en remarquant que

$$\det_{\mathcal{B}} = C_{123} + C_{231} + C_{312} - C_{321} - C_{213} - C_{132}.$$

On peut alors utiliser le fait que les C_{ijk} sont toutes 3-linéaires (mais pas alternées !) pour obtenir la 3-linéarité du déterminant. Le caractère alterné peut également s'obtenir avec ces applications, après un peu de gymnastique mentale.

Proposition 7.2.9. Soit $\tilde{\mathcal{B}} := (u, v, w)$ une famille de trois vecteurs de E . Alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

Démonstration. Exactement la même preuve qu'en dimension 2. ■

Exemple 7.2.10. Considérons $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base canonique

$$\mathcal{B} := (1, X, X^2).$$

Soit la famille

$$\tilde{\mathcal{B}} := (X - 1, -2X^2 + 2X + 3, 4X^2 - 4X - 3).$$

On décompose les vecteurs de cette famille selon la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} X - 1 &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2, \\ -2X^2 + 2X + 3 &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot X + (-2) \cdot X^2, \\ 4X^2 - 4X - 3 &= (-3) \cdot 1 + (-4) \cdot X + 4 \cdot X^2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\det_{\mathcal{B}}(X - 1, -2X^2 + 2X + 3, 4X^2 - 4X - 3) \\ &= (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 3 \cdot (-4) - 0 \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \\ &= -6 \neq 0, \end{aligned}$$

donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7.2.3 La dimension 3 via la dimension 2

On a pu se rendre compte que le cas de la dimension 3 était très similaire à celui de la dimension 2, à ceci près que la multiplication des indices rend les preuves un peu plus fastidieuses. Avant de passer aux dimensions supérieures et multiplier à nouveau les indices, voyons déjà si on peut faire un lien entre la dimension 2 et la dimension 3.

On garde donc l'hypothèse que $n = 3$, avec la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On n'oublie pas que l'on dispose du déterminant en dimension 2, dont l'existence et l'unicité ont été démontrés dans la [Proposition 7.2.3](#).

Comme $\mathcal{B}$ est une base, c'est en particulier une famille libre. Ainsi, $\mathcal{B}_1 := (e_2, e_3) \subset \mathcal{B}$ est également libre : c'est donc une base de $F_1 := \text{vect}(\mathcal{B}_1)$. On définit

$$\begin{aligned} p: E &\rightarrow E \\ u &\mapsto c_2(u)e_2 + c_3(u)e_3 \end{aligned}$$

dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'un endomorphisme, et plus particulièrement d'un projecteur, avec $\text{Im}(p) = F_1$. Notons également :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - c_1(u)e_1.$$

Soit $L: E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme 3-linéaire alternée. Soit $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$. La linéarité de L par rapport à la première variable permet d'écrire :

$$L(u_1, u_2, u_3) = L(c_1(u_1)e_1 + p(u_1), u_2, u_3) = c_1(u_1)L(e_1, u_2, u_3) + L(p(u_1), u_2, u_3).$$

On fait de même avec la deuxième variable :

$$L(p(u_1), u_2, u_3) = c_1(u_2)L(p(u_1), e_1, u_3) + L(p(u_1), p(u_2), u_3).$$

Et encore un coup avec la troisième variable :

$$L(p(u_1), p(u_2), u_3) = c_1(u_3)L(p(u_1), p(u_2), e_1) + L(p(u_1), p(u_2), p(u_3)).$$

On a donc obtenu :

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2, u_3) &= c_1(u_1)L(e_1, u_2, u_3) + c_1(u_2)L(p(u_1), e_1, u_3) + c_1(u_3)L(p(u_1), p(u_2), e_1) \\ &\quad + L(p(u_1), p(u_2), p(u_3)). \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que L est alternée. Pour commencer :

$$L(p(u_1), e_1, u_3) = -L(e_1, p(u_1), u_3) \quad \text{et} \quad L(p(u_1), p(u_2), e_1) = L(e_1, p(u_1), p(u_2)).$$

De plus, $(p(u_1), p(u_2), p(u_3))$ est une famille de trois vecteurs de F_1 qui est un espace de dimension 2 : cette famille est donc liée, et ainsi $L(p(u_1), p(u_2), p(u_3)) = 0$. On obtient alors :

$$L(u_1, u_2, u_3) = c_1(u_1)L(e_1, u_2, u_3) - c_1(u_2)L(e_1, p(u_1), u_3) + c_1(u_3)L(e_1, p(u_1), p(u_2)).$$

On introduit maintenant l'application

$$\begin{aligned} L_1: F_1 \times F_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_2, v_3) &\mapsto L(e_1, v_2, v_3). \end{aligned}$$

Lemme 7.2.11. Pour tout $(v_2, v_3) \in E^2$:

$$L(e_1, v_2, v_3) = L_1(p(v_2), p(v_3)).$$

Démonstration. Soit $(v_2, v_3) \in E^2$. Par linéarité par rapport à la deuxième variable :

$$L(e_1, v_2, v_3) = L(e_1, c_1(v_2)e_1 + p(v_2), v_3) = c_1(v_2)L(e_1, e_1, v_3) + L(e_1, p(v_2), v_3).$$

Comme L est alternée, $L(e_1, e_1, v_3) = 0$. On fait de même avec la troisième variable pour obtenir le résultat. ■

En utilisant ce résultat, on obtient :

$$L(u_1, u_2, u_3) = c_1(u_1)L_1(p(u_2), p(u_3)) - c_1(u_2)L_1(p(u_1), p(u_3)) + c_1(u_3)L_1(p(u_1), p(u_2)),$$

où on a également utilisé le fait que p est un projecteur.

Comme L est 3-linéaire alternée, on vérifie aisément que L_1 est une forme 2-linéaire alternée sur F_1 . Comme $\dim(F_1) = 2$, on peut donc utiliser le déterminant en dimension 2 :

$$\forall (v_2, v_3) \in F_1 \times F_1, \quad L_1(v_2, v_3) = \det_{\mathcal{B}_1}(v_2, v_3)L_1(e_2, e_3).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2, u_3) &= c_1(u_1) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_2), p(u_3))L_1(e_2, e_3) - c_1(u_2) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_3))L_1(e_2, e_3) \\ &\quad + c_1(u_3) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_2))L_1(e_2, e_3). \end{aligned}$$

En revenant à la définition de L_1 , on a $L_1(e_2, e_3) = L(e_1, e_2, e_3)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2, u_3) &= (c_1(u_1) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_2), p(u_3)) - c_1(u_2) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_3)) \\ &\quad + c_1(u_3) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_2)))L(e_1, e_2, e_3). \end{aligned}$$

On a donc bien envie de définir :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) &:= c_1(u_1) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_2), p(u_3)) - c_1(u_2) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_3)) \\ &\quad + c_1(u_3) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), p(u_2)). \end{aligned}$$

La 3-linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$ ne fait aucun doute : elle découle directement de la linéarité des applications coordonnées, de celle de p , et de la 2-linéarité de $\det_{\mathcal{B}_1}$. Par ailleurs, soit $u \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, u, u_3) &= c_1(u) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(u_3)) - c_1(u) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(u_3)) \\ &\quad + c_1(u_3) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(u)). \end{aligned}$$

Comme $\det_{\mathcal{B}_1}$ est alternée, $\det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(u)) = 0$, et les deux autres termes se compensent, menant à :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, u, u_3) = 0.$$

On montre de la même façon que :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, u_2, u) = 0 \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, u, u) = 0,$$

donc $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée. Finalement :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) &= c_1(e_1) \det_{\mathcal{B}_1}(p(e_2), p(e_3)) - c_1(e_2) \det_{\mathcal{B}_1}(p(e_1), p(e_3)) \\ &\quad + c_1(e_3) \det_{\mathcal{B}_1}(p(e_1), p(e_2)). \end{aligned}$$

Or, $c_1(e_2) = c_1(e_3) = 0$, et on vérifie facilement que $p(e_2) = e_2$ et $p(e_3) = e_3$, donc $\det_{\mathcal{B}_1}(p(e_2), p(e_3)) = 1$. Comme de plus $c_1(e_1) = 1$, on obtient bien :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

Exemple 7.2.12. On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour reprendre les notations qui précèdent, on introduit le plan F_1 de base $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_3)$. On note p la projection de E sur F_1 , qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} p: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On se donne trois vecteurs

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) &= c_1(u) \det_{\mathcal{B}_1}(p(v), p(w)) - c_1(v) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(w)) \\ &\quad + c_1(w) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u), p(v)). \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) &= 1 \cdot \det_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) - 4 \cdot \det_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + 7 \cdot \det_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Il reste alors à appliquer la formule du déterminant en dimension 2 :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 0.$$

7.2.4 Cas de la dimension quelconque

On suppose maintenant $\dim(E) = n \geq 3$, toujours avec la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Supposons construit le déterminant en dimension $n - 1$ (c'est notamment le cas pour $n = 3$ grâce à la [Proposition 7.2.3](#)). On va s'inspirer de ce qu'on a fait pour passer de la dimension 2 à la dimension 3, mais cette fois-ci pour passer de la dimension $n - 1$ à la dimension n .

Soit $\mathcal{B}_1 := (e_2, \dots, e_n)$. Comme $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}$ est libre, $\mathcal{B}_1$ est libre, et c'est donc une base de $F_1 := \text{vect}(\mathcal{B}_1)$. Soit l'application

$$\begin{aligned} p: E &\rightarrow E \\ u &\mapsto \sum_{j=2}^n c_j(u) e_j \end{aligned}$$

dont on peut vérifier qu'il s'agit d'un projecteur de E tel que $\text{Im}(p) = F_1$. Remarquons également :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - c_1(u) e_1.$$

Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Montrons par récurrence que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^i c_1(u_j) L(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), e_1, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &\quad + L(p(u_1), \dots, p(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

On commence par utiliser la linéarité par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= L(c_1(u_1) e_1 + p(u_1), u_2, \dots, u_n) \\ &= c_1(u_1) L(e_1, u_2, \dots, u_n) + L(p(u_1), u_2, \dots, u_n), \end{aligned}$$

et ainsi le résultat est vrai au rang $i = 1$. Supposons qu'il le soit pour un certain rang $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On utilise la linéarité par rapport à la $(i + 1)$ -ème variable :

$$\begin{aligned} L(p(u_1), \dots, p(u_i), u_{i+1}, \dots, u_n) &= L(p(u_1), \dots, p(u_i), c_1(u_{i+1}) e_1 + p(u_{i+1}), u_{i+2}, \dots, u_n) \\ &= c_1(u_{i+1}) L(p(u_1), \dots, p(u_i), e_1, u_{i+2}, \dots, u_n) \\ &\quad + L(p(u_1), \dots, p(u_i), p(u_{i+1}), u_{i+2}, \dots, u_n), \end{aligned}$$

et il suffit d'injecter cette égalité dans l'hypothèse de récurrence pour obtenir le résultat. Pour $i = n$, on obtient en particulier :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n c_1(u_j) L(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), e_1, u_{j+1}, \dots, u_n) + L(p(u_1), \dots, p(u_n)).$$

Or, $(p(u_1), \dots, p(u_n))$ est une famille de n vecteurs de F_1 qui est un espace de dimension $n - 1$, donc cette famille est liée et $L(p(u_1), \dots, p(u_n)) = 0$. Ainsi :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n c_1(u_j) L(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), e_1, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on invoque le [Corollaire 7.1.10](#) pour ramener e_1 en première position :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_1(u_j) L(e_1, p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), u_{j+1}, \dots, u_n).$$

Introduisons maintenant l'application

$$\begin{aligned} L_1 : F_1^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_2, \dots, v_n) &\mapsto L(e_1, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Lemme 7.2.13. Soit $(v_2, \dots, v_n) \in E^{n-1}$. Alors :

$$L(e_1, v_2, \dots, v_n) = L_1(p(v_2), \dots, p(v_n)).$$

Démonstration. On utilise la linéarité par rapport à la deuxième variable :

$$\begin{aligned} L(e_1, v_2, \dots, v_n) &= L(e_1, c_1(v_2)e_1 + p(v_2), v_3, \dots, v_n) \\ &= c_1(v_2)L(e_1, e_1, v_3, \dots, v_n) + L(e_1, p(v_2), v_3, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Comme L est alternée, $L(e_1, e_1, v_3, \dots, v_n) = 0$, et il suffit ainsi de faire la même chose pour les autres variables pour obtenir le résultat. ■

En appliquant ce résultat, on obtient :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_1(u_j) L_1(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), p(u_{j+1}), \dots, p(u_n)).$$

Remarquons maintenant que, puisque L est n -linéaire alternée, L_1 est elle-même $(n - 1)$ -linéaire alternée sur F_1 qui est de dimension $n - 1$: on peut donc utiliser le déterminant dans cette dimension. Autrement dit :

$$\forall (v_2, \dots, v_n) \in F_1^{n-1}, \quad L_1(v_2, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}_1}(v_2, \dots, v_n) L_1(e_2, \dots, e_n).$$

En revenant à la définition de L_1 , on lit :

$$L_1(e_2, \dots, e_n) = L(e_1, \dots, e_n).$$

Ainsi :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_1(u_j) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), p(u_{j+1}), \dots, p(u_n)) \right) L(e_1, \dots, e_n).$$

Définition 7.2.14. On appelle déterminant en base $\mathcal{B}$ l'application

$$\det_{\mathcal{B}}: E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_1(u_j) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), p(u_{j+1}), \dots, p(u_n)).$$

On a donc obtenu le résultat suivant.

Proposition 7.2.15. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée sur E . Alors, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$L(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) L(e_1, \dots, e_n).$$

Théorème 7.2.16. Le déterminant en base $\mathcal{B}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur E vérifiant

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Démonstration. Les applications coordonnées sont linéaires, de même que le projecteur p . Comme de plus $\det_{\mathcal{B}_1}$ est $(n-1)$ -linéaire, on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire. Vérifions qu'elle est alternée. Soit pour cela $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k < \ell$ et $u_k = u_\ell =: u$. Par définition :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{k, \ell\}}}^n (-1)^{j-1} c_1(u_j) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), p(u_{j+1}), \dots, p(u_n)) \\ &\quad + (-1)^{k-1} c_1(u) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ &\quad + (-1)^{\ell-1} c_1(u) \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{\ell-1}), p(u_{\ell+1}), \dots, p(u_n)). \end{aligned}$$

Or, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $j \notin \{k, \ell\}$, $k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket \cup \llbracket j+1, n \rrbracket$, et il en va de même pour ℓ . Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n)$ contient deux fois le vecteur u , donc $\det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{j-1}), p(u_{j+1}), \dots, p(u_n)) = 0$ car $\det_{\mathcal{B}_1}$ est alternée. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ = \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_{\ell-1}), p(u), p(u_{\ell+1}), \dots, p(u_n)), \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ = \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_{\ell-1}), p(u_{\ell+1}), \dots, p(u_n)). \end{aligned}$$

On peut donc obtenir la même quantité en déplaçant $p(u)$, par exemple dans la seconde égalité : on le met à la place de $p(u_{\ell-1})$, ce qui nous donne $\ell - k - 1$ déplacements. Donc :

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ + (-1)^{\ell-1} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ = (-1)^{k-1} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) \\ + (-1)^{\ell-1} (-1)^{\ell-k-1} \det_{\mathcal{B}_1}(p(u_1), \dots, p(u_{k-1}), p(u_{k+1}), \dots, p(u_n)) = 0. \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0,$$

donc $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée. De plus :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \underbrace{c_1(e_j)}_{=\delta_{1,j}} \det_{\mathcal{B}_1}(p(e_1), \dots, p(e_{j-1}), p(e_{j+1}), \dots, p(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_1}(p(e_2), \dots, p(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}_1}(e_2, \dots, e_n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Enfin, c'est bien la seule forme n -linéaire alternée vérifiant cette égalité. En effet, soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée telle que $L(e_1, \dots, e_n) = 1$. Alors, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$L(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \underbrace{L(e_1, \dots, e_n)}_{=1},$$

d'où $L = \det_{\mathcal{B}}$. ■

7.2.5 Interprétation géométrique du déterminant

Considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$:

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1).$$

Soient deux vecteurs

$$u := (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad v := (c, d) \in \mathbb{R}^2.$$

On définit un parallélogramme $ABCD$ à partir de ces deux vecteurs :

$$A(0, 0), \quad B(a, b), \quad C(a + c, b + d), \quad D(c, d).$$

L'aire de ce parallélogramme est égale à celle du rectangle formé par le segment $[AB]$ et le segment $[BH]$, où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (CD) , comme l'illustre la [figure à faire].

Pour $\lambda \geq 0$, on considère la même construction en laissant v inchangé mais en multipliant u par λ . L'aire de ce nouveau parallélogramme $AB'C'D$ sera donc donnée par l'aire du rectangle formé par $[AB']$ et $[B'H']$ avec H' le nouveau projeté orthogonal. Or :

$$AB' = \lambda AB,$$

donc on a multiplié l'aire précédente par λ . [figure à faire]

Considérons maintenant un autre vecteur $w \in \mathbb{R}^2$. On conserve v pour construire le parallélogramme, mais on utilise maintenant $u + w$ pour définir l'autre côté. On peut se convaincre assez facilement que l'aire de ce parallélogramme est la somme des aires des parallélogrammes associés à u et v , et à w et v . [figure à faire]

Ce raisonnement illustre la linéarité de l'aire du parallélogramme par rapport à la première variable. On peut cependant faire le même raisonnement avec le vecteur v , et on obtient la linéarité par rapport à la seconde variable. Ainsi, l'aire du parallélogramme est une forme 2-linéaire.

On peut essayer de construire un parallélogramme avec deux fois le même vecteur u et v : on obtient un quadrilatère aplati, qui a donc une aire nulle. Ceci illustre que l'aire est une forme alternée.

Enfin, si on considère $u = e_1$ et $v = e_2$, on obtient le carré unité, dont l'aire est égale à 1. Ainsi, l'aire du parallélogramme est une forme 2-linéaire alternée, qui vaut 1 sur la base : par unicité, il ne peut donc s'agir que du déterminant.

7.2.6 Quelques propriétés

On peut commencer par généraliser le résultat qui avait été obtenu en dimension 2.

Proposition 7.2.17. Soit $\tilde{\mathcal{B}} := (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Démonstration. On procède comme en dimension 2. Si $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base, on utilise le fait que le déterminant en base $\tilde{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E :

$$1 = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, \dots, e_n).$$

Réciproquement, supposons que $\tilde{\mathcal{B}}$ ne soit pas une base de E . Comme cette famille contient n vecteurs, elle est donc liée, et ainsi $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$. ■

Il peut parfois être utile d'utiliser des expressions alternatives du déterminant. Il a ici été écrit en « développant » une forme n -linéaire alternée par rapport à la première

coordonnée. Il est tout à fait possible de faire un raisonnement similaire pour développer par rapport à n'importe quelle coordonnée. Pour cela, on introduit

$$\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \setminus \{e_j\},$$

pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, base de $F_j := \text{vect}(\mathcal{B}_j)$ qui est l'image du projecteur

$$\begin{aligned} p_j : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto u - c_j(u)e_j \end{aligned}$$

et sur lequel on peut définir l'application $(n-1)$ -linéaire alternée

$$\begin{aligned} L_j : F_j^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_2, \dots, v_n) &\mapsto L(e_j, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Proposition 7.2.18. Soit $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \\ = (-1)^{I-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_I(u_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $L : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= L(c_I(u_1)e_I + p_I(u_1), u_2, \dots, u_n) \\ &= c_I(u_1)L(e_I, u_2, \dots, u_n) + L(p_I(u_1), u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

En continuant de la même façon pour toutes les variables, on obtient :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^n c_I(u_j) L(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), e_I, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &\quad + L(p_I(u_1), \dots, p_I(u_n)). \end{aligned}$$

Or, $(p_I(u_1), \dots, p_I(u_n))$ est une famille de n vecteurs de F_I qui est un espace vectoriel de dimension $n-1$, donc $L(p_I(u_1), \dots, p_I(u_n)) = 0$. On fait ensuite « remonter » e_I en première position dans chaque terme de la somme pour trouver :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_I(u_j) L(e_I, p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), u_{j+1}, \dots, u_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_I(u_j) L_I(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_I(u_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) \\ &\quad L_I(e_1, \dots, e_{I-1}, e_{I+1}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Or :

$$L_I(e_1, \dots, e_{I-1}, e_{I+1}, \dots, e_n) = L(e_I, e_1, \dots, e_{I-1}, e_{I+1}, \dots, e_n) = (-1)^{I-1} L(e_1, \dots, e_n).$$

Ce développement vaut pour n'importe quelle forme n -linéaire alternée L . En considérant $L = \det_{\mathcal{B}}$, on obtient le résultat. ■

Exemple 7.2.19. On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de la base canonique. Soient

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer :

$$c_2(u) = c_2(v) = 0,$$

donc il peut être intéressant de développer par rapport à la deuxième coordonnée. En effet, l'application de la formule précédente avec $I = 2$ donne :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) &= - \underbrace{(c_2(u) \det_{\mathcal{B}_2}(p_2(v), p_2(w)))}_{=0} - \underbrace{c_2(v) \det_{\mathcal{B}_2}(p_2(u), p_2(w))}_{=0} \\ &\quad + c_2(w) \det_{\mathcal{B}_2}(p_2(u), p_2(v)) \\ &= -2(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 10. \end{aligned}$$

Il est aussi possible de développer le déterminant par rapport à un vecteur bien précis.

Proposition 7.2.20. Soit $J \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \\ = (-1)^{J-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} c_i(u_J) \det_{\mathcal{B}_i}(p_i(u_1), \dots, p_i(u_{J-1}), p_i(u_{J+1}), \dots, p_i(u_n)). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $L: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme n -linéaire alternée. On applique la linéarité de L par rapport à la J -ème variable :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= L \left(u_1, \dots, u_{J-1}, \sum_{i=1}^n c_i(u_J) e_i, u_{J+1}, \dots, u_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(u_J) L(u_1, \dots, u_{J-1}, e_i, u_{J+1}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

On fait alors « remonter » e_i à la première position :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{J-1} c_i(u_J) L(e_i, u_1, \dots, u_{J-1}, u_{J+1}, \dots, u_n) \\ &= (-1)^{J-1} \sum_{i=1}^n c_i(u_J) L_i(p_i(u_1), \dots, p_i(u_{J-1}), p_i(u_{J+1}), \dots, p_i(u_n)). \end{aligned}$$

Il reste à utiliser le déterminant en dimension inférieure :

$$\begin{aligned} L(u_1, \dots, u_n) &= (-1)^{J-1} \sum_{i=1}^n c_i(u_J) \det_{\mathcal{B}_i}(p_i(u_1), \dots, p_i(u_{J-1}), p_i(u_{J+1}), \dots, p_i(u_n)) \\ &\quad L_i(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &= (-1)^{J-1} \sum_{i=1}^n c_i(u_J) \det_{\mathcal{B}_i}(p_i(u_1), \dots, p_i(u_{J-1}), p_i(u_{J+1}), \dots, p_i(u_n)) \\ &\quad L(e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &= (-1)^{J-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} c_i(u_J) \det_{\mathcal{B}_i}(p_i(u_1), \dots, p_i(u_{J-1}), \\ &\quad p_i(u_{J+1}), \dots, p_i(u_n)) L(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

et on obtient encore une fois le résultat en considérant $L = \det_{\mathcal{B}}$. ■

Exemple 7.2.21. Considérons encore une fois $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de la base canonique. Soient

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que v a presque toutes ses composantes nulles, donc il peut sembler intéressant de développer par rapport à ce vecteur. Appliquons la formule précédente avec $J = 2$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) &= - \underbrace{(c_1(v) \det_{\mathcal{B}_1}(p_1(u), p_1(w)))}_{=0} - c_2(v) \det_{\mathcal{B}_2}(p_2(u), p_2(w)) \\ &\quad + \underbrace{c_3(v) \det_{\mathcal{B}_3}(p_3(u), p_3(w))}_{=0} \\ &= 4(1 \cdot 7 - 3 \cdot 5) = -32. \end{aligned}$$

Ces développements du déterminant, et plus particulièrement celui donné par la [Proposition 7.2.18](#), nous permettent de démontrer le résultat suivant, qui ne semble pas si immédiat que cela à première vue. Par définition, le déterminant est linéaire par rapport à chacune des variables. Nous allons démontrer qu'il est également linéaire par rapport à chacune des coordonnées (en quelque sorte).

Lemme 7.2.22. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Soit $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient $w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit la famille $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ définie par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c_i(v_j) := \begin{cases} c_i(u_j) & \text{si } i \neq I, \\ \lambda c_I(u_j) + w_j & \text{si } i = I. \end{cases}$$

Soit la famille $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \in E^n$ définie par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c_i(\tilde{w}_j) := \begin{cases} c_i(u_j) & \text{si } i \neq I, \\ w_j & \text{si } i = I. \end{cases}$$

Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) + \det_{\mathcal{B}}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n).$$

Démonstration. On utilise la [Proposition 7.2.18](#) pour développer le déterminant par rapport à la I -ème coordonnée :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} c_I(v_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(v_1), \dots, p_I(v_{j-1}), p_I(v_{j+1}), \dots, p_I(v_n)).$$

Or :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{I\}, \quad c_i(v_j) = c_i(u_j),$$

ce qui implique :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p_I(v_j) = p_I(u_j).$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} (\lambda c_I(u_j) + w_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} c_I(u_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} w_j \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)). \end{aligned}$$

On applique à nouveau la [Proposition 7.2.18](#) pour obtenir :

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} c_I(u_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Par ailleurs, la définition des $\tilde{w}_j$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} w_j \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(u_1), \dots, p_I(u_{j-1}), p_I(u_{j+1}), \dots, p_I(u_n)) \\ = \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} c_I(\tilde{w}_j) \det_{\mathcal{B}_I}(p_I(\tilde{w}_1), \dots, p_I(\tilde{w}_{j-1}), p_I(\tilde{w}_{j+1}), \dots, p_I(\tilde{w}_n)) \\ = \det_{\mathcal{B}}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

en ayant encore une fois utilisé la [Proposition 7.2.18](#). ■

Exemple 7.2.23. On considère $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. Ce dernier résultat peut être illustré de la façon suivante (avec $I = 1$) :

$$\det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + w_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda b_1 + w_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda \det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) + \det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} w_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right),$$

d'où l'idée de « linéarité par rapport à un coefficient ».

Ce lemme peut sembler un peu technique, mais il nous permet de démontrer le résultat suivant. L'énoncé est assez lourd en notations, mais il s'agit de montrer que le déterminant reste le même lorsque l'on considère la « transposée » d'une famille de vecteurs.

Proposition 7.2.24. Soit

$$\begin{aligned} \Phi: E^n &\rightarrow E^n \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto (\phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_n)), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \phi_k: E^n &\rightarrow E \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \sum_{j=1}^n c_k(u_j) e_j. \end{aligned}$$

Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi = \det_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On pose :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{u}_k := \phi_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n c_k(u_j) e_j,$$

de sorte que :

$$\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n).$$

Soit $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous allons montrer que $\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi$ est linéaire par rapport à la I -ème variable. Soient pour cela $w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v_k &:= \phi_k(u_1, \dots, u_{I-1}, \lambda u_I + w, u_{I+1}, \dots, u_n) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^n c_k(u_j) e_j + (\lambda c_k(u_I) + c_k(w)) e_I. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{cases} c_i(v_k) = c_k(u_i) = c_i(\tilde{u}_k), & \text{pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{I\}, \\ c_I(v_k) = \lambda c_k(u_I) + c_k(w) = \lambda c_I(\tilde{u}_k) + c_k(w). \end{cases}$$

On définit ensuite, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{w}_k \in E$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{I\}, c_i(\tilde{w}_k) = c_i \tilde{u}_k, \quad c_I(\tilde{w}_k) = c_k(w).$$

On peut donc appliquer le [Lemme 7.2.22](#) :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n) + \det_{\mathcal{B}}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n).$$

Autrement dit, on vient de démontrer :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(u_1, \dots, u_{I-1}, \lambda u_I + w, u_{I+1}, \dots, u_n) \\ = \lambda \det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(u_1, \dots, u_n) + \det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(u_1, \dots, u_{I-1}, w, u_{I+1}, \dots, u_n), \end{aligned}$$

donc $\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi$ est linéaire par rapport à la I -ème variable. Comme I est quelconque, on en déduit que $\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi$ est n -linéaire.

Supposons maintenant qu'il existe $p \neq q$ tels que $u_p = u_q =: u$. Alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \phi_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{p, q\}}}^n c_k(u_j) e_j + c_k(u)(e_p + e_q) \in \text{vect}((\mathcal{B} \setminus (e_p, e_q)) \cup \{e_p + e_q\}).$$

Autrement dit, les $\phi_k(u_1, \dots, u_n)$ sont n vecteurs pris dans un espace de dimension au plus $n - 1$: ils forment une famille liée. Donc :

$$\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \phi_n(u_1, \dots, u_n)) = 0,$$

et ainsi $\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi$ est alternée.

Finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \phi_k(e_1, \dots, e_n) = e_k,$$

donc :

$$\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi(e_1, \dots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

En résumé, $\det_{\mathcal{B}} \circ \Phi$ est une forme n -linéaire alternée sur E qui vaut 1 sur la base $\mathcal{B}$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est la seule forme n -linéaire alternée vérifiant cela, on en déduit le résultat. ■

Exemple 7.2.25. Pour mieux comprendre le terme de « transposée », on peut considérer $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On obtient :

$$\det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \det_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right).$$

Proposition 7.2.26. Soit F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel tel que $\dim(F) = \dim(E) = n$. Soit $\tilde{\mathcal{B}} := (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \phi(e_i) = f_i.$$

Alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)).$$

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} L: E^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que L est une forme n -linéaire alternée sur E . Ainsi :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad L(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) L(e_1, \dots, e_n).$$

D'une part :

$$L(u_1, \dots, u_n) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)).$$

D'autre part :

$$L(e_1, \dots, e_n) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(f_1, \dots, f_n) = 1,$$

d'où le résultat. ■

Une conséquence de ce résultat est qu'il est toujours possible de ramener le calcul d'un déterminant dans un espace de dimension finie quelconque à un calcul de déterminant sur un autre espace de même dimension. Par exemple, on peut toujours se ramener à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{E}_n := (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donnée par les matrices élémentaires :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (E_j)_{i1} = \delta_{j,i}.$$

On note ϕ_n l'unique application linéaire dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{E}_n$. Il est plutôt rapide de vérifier que :

$$\forall u \in E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\phi_n(u))_{i,1} = c_i(u).$$

Corollaire 7.2.27. Pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{E}_n}(\phi_n(u_1), \dots, \phi_n(u_n)).$$

L'avantage de ce point de vue est que la manipulation de déterminants devient un peu plus facile à visualiser, en particulier pour ce qui est des formules de développements vues précédemment. En effet, avec ϕ_n , on peut identifier n'importe quel vecteur $u \in E$ à une matrice colonne donnée par :

$$\phi_n(u) = \begin{pmatrix} c_1(u) \\ \vdots \\ c_n(u) \end{pmatrix}.$$

Plus intéressant, on voit plus facilement à quoi ressemblent les différentes projections :

$$\phi_n(p_j(u)) = \begin{pmatrix} c_1(u) \\ \vdots \\ c_{j-1}(u) \\ 0 \\ c_{j+1}(u) \\ \vdots \\ c_n(u) \end{pmatrix}$$

que l'on identifie facilement à un vecteur de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ en « retirant » le j -ème coefficient (toujours nul). Pour cela, on introduit, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} R_j : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto R_j(X) \end{aligned}$$

où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad (R_j(X))_{i,1} = \begin{cases} X_{i,1}, & \text{si } i < j, \\ X_{i+1,1}, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

De manière un peu moins formelle, on peut tout simplement écrire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad R_j \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, et en utilisant les résultats précédents, on obtient ainsi le résultat suivant.

Corollaire 7.2.28. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On note :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad C_j := \phi_n(u_j).$$

Pour tout $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) &= \det_{\mathcal{E}_n}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} (C_j)_{I,1} \det_{\mathcal{E}_{n-1}}(R_I(C_1), \dots, R_I(C_{j-1}), R_I(C_{j+1}), \dots, R_I(C_n)). \end{aligned}$$

Pour tout $J \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) &= \det_{\mathcal{E}_n}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+J} (C_J)_{i,1} \det_{\mathcal{E}_{n-1}}(R_i(C_1), \dots, R_i(C_{J-1}), R_i(C_{J+1}), \dots, R_i(C_n)). \end{aligned}$$

Exemple 7.2.29. L'intérêt de ces formules est essentiellement pratique : on fait « naturellement » apparaître les simplifications qui arrivent en passant à la dimension inférieure. Par exemple, dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}_3} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \right) &= 2 \det_{\mathcal{E}_2} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} \right) - 3 \det_{\mathcal{E}_2} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + 11 \det_{\mathcal{E}_2} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot (5 \cdot 13 - 7 \cdot 12) - 3 \cdot (4 \cdot 13 - 6 \cdot 12) \\ &\quad + 11 \cdot (4 \cdot 7 - 6 \cdot 5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 7.2.30. Avec toutes ces expressions qui font appel à la dimension inférieure, on peut raisonnablement se poser la question : ces formules restent-elles valables en dimension 2 ? En effet, nous n'avons pas défini le déterminant sur un espace de dimension 1.

Le concept de forme alternée n'a aucun sens en dimension 1. On peut cependant montrer que toute forme linéaire L sur un tel espace est de la forme :

$$L = L(e_1)c_1.$$

On obtient alors qu'une définition naturelle du déterminant en dimension 1 revient à choisir $\det_{\mathcal{B}} = c_1$, l'application coordonnée.

7.3 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 7.3.1. Soit $\tilde{\mathcal{B}} := (b_1, \dots, b_n)$ une base de E . Alors :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(f(b_1), \dots, f(b_n)).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit

$$\begin{aligned} L: E^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{aligned}$$

dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'une forme n -linéaire alternée sur E . Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= L(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(u_1, \dots, u_n) L(b_1, \dots, b_n) \\ &= \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(u_1, \dots, u_n) \det_{\mathcal{B}}(f(b_1), \dots, f(b_n)). \end{aligned}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(f(b_1), \dots, f(b_n)).$$

Par ailleurs, $\det_{\mathcal{B}}$ est elle-même une forme n -linéaire alternée, donc :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(u_1, \dots, u_n) \det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n).$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(b_1), \dots, f(b_n)) = \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(f(b_1), \dots, f(b_n)) \det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n).$$

On obtient ainsi :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \underbrace{\det_{\tilde{\mathcal{B}}}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)}_{=1} \det_{\tilde{\mathcal{B}}}(f(b_1), \dots, f(b_n)),$$

d'où le résultat. ■

Définition 7.3.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de l'endomorphisme f , noté $\det(f)$, la quantité :

$$\det(f) := \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Remarque 7.3.3. Le [Théorème 7.3.1](#) garantit que le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base choisie.

Proposition 7.3.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \det(f).$$

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} L: E^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{aligned}$$

dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'une forme n -linéaire alternée. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) &= L(u_1, \dots, u_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) L(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \det(f). \end{aligned}$$

■

Proposition 7.3.5. Le déterminant de l'identité est égal à 1 :

$$\det(\text{Id}_E) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Id}_E(e_i) = e_i$, donc :

$$\det(\text{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(e_1), \dots, \text{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

■

Proposition 7.3.6. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$$

Démonstration. On commence par appliquer la définition :

$$\det(f \circ g) = \det_{\mathcal{B}}(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))).$$

On applique ensuite la [Proposition 7.3.4](#) :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) = \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \det(f),$$

et on termine en appliquant la définition du déterminant de g :

$$\det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) = \det(g),$$

d'où le résultat.

■

Exercice 7.2

Solution page 218.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que $\det(s) = \pm 1$.

Proposition 7.3.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer l'équivalence :

$$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ base de } E && \text{(Corollaire 4.3.13)} \\ &\iff \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))}_{=\det(f)} \neq 0 && \text{(Proposition 7.2.17)}. \end{aligned}$$

De plus :

$$1 = \det(\text{Id}_E) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f) \det(f^{-1})$$

par application de la Proposition 7.3.6. ■

7.4 Déterminant d'une matrice

On rappelle que, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut associer un endomorphisme canonique

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

Définition 7.4.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de la matrice A , noté $\det(A)$, la quantité :

$$\det(A) := \det(f_A).$$

À partir de cette définition, on peut déjà démontrer quelques résultats qui sont des conséquences directes des résultats obtenus sur les endomorphismes dans la section précédente.

Proposition 7.4.2. Le déterminant de la matrice identité vaut 1 :

$$\det(I_n) = 1.$$

Démonstration. Commençons par remarquer :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), f_{I_n}(X) = I_n X = X = \text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}(X),$$

donc $f_{I_n} = \text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, et ainsi :

$$\det(I_n) = \det(f_{I_n}) = \det(\text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}) = 1.$$

Proposition 7.4.3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Démonstration. On commence par remarquer :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), f_{AB}(X) = (AB)X = A(BX) = f_A(BX) = f_A(f_B(X)) = f_A \circ f_B(X),$$

donc $f_{AB} = f_A \circ f_B$ et ainsi :

$$\det(AB) = \det(f_{AB}) = \det(f_A \circ f_B) = \det(f_A) \det(f_B) = \det(A) \det(B)$$

en appliquant la [Proposition 7.3.6](#). ■

Proposition 7.4.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Démonstration. On commence par l'équivalence :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff f_A \text{ bijective} && \text{(Théorème 5.5.3)} \\ &\iff \underbrace{\det(f_A)}_{=\det(A)} \neq 0 && \text{(Proposition 7.3.7).} \end{aligned}$$

De plus :

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}),$$

par application de la [Proposition 7.4.3](#). ■

Pour la suite, rappelons que $\mathcal{E}_n := (E_1, \dots, E_n)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note également $\tilde{\mathcal{E}}_n := (E_1^T, \dots, E_n^T)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera simplement $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_n$. Mais avant de passer aux résultats, voyons déjà un petit exemple.

Exemple 7.4.5. Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son endomorphisme associé est alors :

$$\begin{aligned} f_A: \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont on va calculer le déterminant pour obtenir celui de A (puisqu'il s'agit de la seule définition à laquelle on a accès pour le moment). Le déterminant de f_A ne dépend pas de la base, il semble donc sage de considérer la base canonique $\mathcal{E}$. Commençons par calculer :

$$f_A(E_1) = f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_A(E_2) = f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\det(A) = \det(f_A) = \det_{\mathcal{E}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Dans cet exemple, on peut remarquer que calculer le déterminant de la matrice revient à calculer le déterminant de ses colonnes. Il ne s'agit pas d'un « coup de chance » : c'est une propriété commune à toutes les matrices, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 7.4.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ les colonnes de A :

$$A = (C_1 \quad \cdots \quad C_n).$$

Alors :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n).$$

Démonstration. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f_A(E_j) = AE_j = C_j,$$

d'où :

$$\det(A) = \det(f_A) = \det_{\mathcal{E}}(f(E_1), \dots, f(E_n)) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n).$$

■

Exercice 7.3

[Solution page 219.](#)

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit la matrice

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(D)$.

Proposition 7.4.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})^n$ les lignes de A :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(L_1, \dots, L_n).$$

Démonstration. On commence par appliquer la [Proposition 7.4.6](#) :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n),$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A . On applique alors la [Proposition 7.2.24](#) :

$$\det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{E}}(\phi_1(C_1, \dots, C_n), \dots, \phi_n(C_1, \dots, C_n)).$$

Dans notre cas, les applications ϕ_k s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi_k : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (C_1, \dots, C_n) &\mapsto \sum_{j=1}^n (C_j)_{k,1} E_j. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(\phi_k(C_1, \dots, C_n))_{i,1} = \sum_{j=1}^n (C_j)_{k,1} (E_j)_{i,1} = \sum_{j=1}^n (C_j)_{k,1} \delta_{j,i} = (C_i)_{k,1} = A_{ki} = (L_k)_{1,i},$$

et ainsi :

$$\phi_k(C_1, \dots, C_n) = L_k^T,$$

donc :

$$\det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{E}}(L_1^T, \dots, L_n^T),$$

et il suffit alors d'appliquer la [Proposition 7.2.26](#) pour conclure, l'application transposée étant un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. ■

Corollaire 7.4.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Démonstration. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , et on note $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. Par la [Proposition 7.4.7](#), on a :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(L_1, \dots, L_n).$$

Or :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i = \tilde{E}_i A = E_i^T A = (A^T E_i)^T = (f_{A^T}(E_i))^T.$$

Ainsi :

$$\det(A) = \det_{\tilde{\mathcal{E}}}((f_{A^T}(E_1))^T, \dots, (f_{A^T}(E_n))^T) = \det_{\mathcal{E}}(f_{A^T}(E_1), \dots, f_{A^T}(E_n)) = \det(A^T).$$

■

Pour $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note :

$$\begin{aligned} R_{k,\ell} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto R_{k,\ell}(A) \end{aligned}$$

où :

$$R_{k,\ell}(A) := (R_k(C_1) \quad \cdots \quad R_k(C_{\ell-1}) \quad R_k(C_{\ell+1}) \quad \cdots \quad R_k(C_n)),$$

où $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ désigne les colonnes de A . Schématiquement, $R_{k,\ell}(A)$ n'est autre que la matrice obtenue en retirant la k -ème ligne et la ℓ -ème colonne de A :

$$\begin{aligned} R_{k,\ell} : \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,\ell-1} & a_{1,\ell} & a_{1,\ell+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,\ell-1} & a_{k-1,\ell} & a_{k-1,\ell+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,\ell-1} & a_{k,\ell} & a_{k,\ell+1} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,\ell-1} & a_{k+1,\ell} & a_{k+1,\ell+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,\ell-1} & a_{n,\ell} & a_{n,\ell+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,\ell-1} & a_{1,\ell+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,\ell-1} & a_{k-1,\ell+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,\ell-1} & a_{k+1,\ell+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,\ell-1} & a_{n,\ell+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec cette notation, une conséquence immédiate du [Corollaire 7.2.28](#) et de la [Proposition 7.4.6](#) est le résultat suivant.

Proposition 7.4.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{I+j} A_{I,j} \det(R_{I,j}(A)).$$

Pour tout $J \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+J} A_{i,J} \det(R_{i,J}(A)).$$

Ces formules nous permettent de développer le déterminant d'une matrice par rapport à une ligne ou une colonne. Comme ce résultat peut sembler quelque peu indigeste avec toutes ces notations, voyons un exemple.

Exemple 7.4.10. On cherche à calculer le déterminant de :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

On peut par exemple choisir de développer par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1(5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bien entendu, développer par rapport à autre chose donnerait le même résultat. Considérons par exemple le développement par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6(1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 9(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 7.4.11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f)).$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ l'unique application linéaire telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \phi(e_k) = E_k.$$

On peut appliquer la [Proposition 7.2.26](#) :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{E}}(\phi(f(e_1)), \dots, \phi(f(e_n))).$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut décomposer $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^n c_k(f(e_j))e_k.$$

Ainsi :

$$\phi(f(e_j)) = \sum_{k=1}^n c_k(f(e_j))\phi(e_k) = \sum_{k=1}^n c_k(f(e_j))E_k.$$

Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(\phi(f(e_j)))_{i,1} = \sum_{k=1}^n c_k(f(e_j))(E_k)_{i,1} = \sum_{k=1}^n c_k(f(e_j))\delta_{k,i} = c_i(f(e_j)) = (M_{\mathcal{B}}(f))_{ij},$$

donc $\phi(f(e_j))$ n'est autre que la j -ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(f)$. Il suffit alors d'appliquer la [Proposition 7.4.6](#) pour conclure. ■

Proposition 7.4.12. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_i) := u_i.$$

Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(f).$$

Démonstration. On revient simplement à la définition :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(f). \quad \blacksquare$$

Corollaire 7.4.13. Sous les mêmes hypothèses, on décompose les vecteurs selon la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

Soit :

$$A := (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(A).$$

Démonstration. On commence par remarquer :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = c_i(u_j) = c_i(f(e_j)) = (M_{\mathcal{B}}(f))_{ij},$$

donc $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, donc il suffit d'appliquer le résultat précédent. ■

7.5 Comatrice

Définition 7.5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle comatrice de A , notée $\text{Com}(A)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \text{Com}(A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(R_{ij}(A)).$$

Exemple 7.5.2. Soit

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Écrivons la comatrice de A :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det((d)) & (-1)^{1+2} \det((c)) \\ (-1)^{2+1} \det((b)) & (-1)^{2+2} \det((a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Profitons-en pour faire un petit calcul supplémentaire :

$$A \text{Com}(A)^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}.$$

La formule obtenue dans cet exemple ne dépend pas de la dimension : comme le montre le résultat suivant, elle est vraie quelle que soit la taille de la matrice.

Proposition 7.5.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \text{Com}(A)^T = \det(A) I_n.$$

Démonstration. Commençons par écrire la définition du produit. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors :

$$\begin{aligned} (A \text{Com}(A)^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} (\text{Com}(A)^T)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \text{Com}(A)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{ik} \det(R_{jk}(A)). \end{aligned}$$

Intéressons-nous aux coefficients diagonaux de ce produit. Supposons $i = j$. Alors :

$$(A \text{Com}(A)^T)_{ii} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} \det(R_{ik}(A)).$$

On reconnaît le développement de $\det(A)$ par rapport à la i -ème ligne de la [Proposition 7.4.9](#). Ainsi :

$$(A \text{Com}(A)^T)_{ii} = \det(A) = (\det(A) I_n)_{ii}.$$

Continuons avec les coefficients extra-diagonaux. Supposons $i \neq j$. Soit $(L_1, \dots, L_n) \in$

$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})^n$ les lignes de A . Soit :

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{j-1} \\ L_i \\ L_{j+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, les lignes i et j de $\tilde{A}$ sont les mêmes, donc $\det(\tilde{A}) = 0$. Développons ce déterminant par rapport à la j -ème ligne :

$$\det(\tilde{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \tilde{A}_{jk} \det(R_{jk}(\tilde{A})).$$

Par définition de $\tilde{A}$:

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \tilde{A}_{jk} = A_{ik}.$$

Par ailleurs, $\tilde{A}$ et A coïncident en dehors de la j -ème ligne, donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad R_{jk}(\tilde{A}) = R_{jk}(A).$$

Ainsi :

$$0 = \det(\tilde{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{jk} \det(R_{jk}(A)) = (A \operatorname{Com}(A)^T)_{ij},$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 7.5.4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{Com}(A)^T.$$

Exemple 7.5.5. Reprenons une matrice A de taille 2×2 quelconque. Si on suppose que son déterminant est non nul, alors A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7.6 Calcul du déterminant d'une matrice en pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le calcul d'un déterminant étant une opération lourde, nous allons nous intéresser dans cette section à quelques astuces permettant de simplifier cette tâche... lorsque cela s'y prête. On note $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ les colonnes de A et $(L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})^n$ ses lignes.

Notation 7.6.1. On note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

L'approche la plus courante pour calculer un déterminant consiste à utiliser la [Proposition 7.4.9](#) autant que nécessaire pour ne plus avoir que des déterminants de taille 2×2 à calculer (déterminants pour lesquels la formule explicite est digeste). On peut par exemple développer par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1),2} & \cdots & a_{(n-1),n} \end{vmatrix}.$$

Le développement par rapport à la première ligne est aussi tout à fait possible :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Le choix de développer par rapport à la première ligne, la première colonne, ou d'ailleurs n'importe quelle autre ligne ou colonne, est un choix à faire en pratique, selon les cas. Assez souvent, on choisira une ligne ou une colonne contenant beaucoup de zéros : ainsi, on limitera le nombre de « sous-déterminants » à calculer.

Exemple 7.6.2. Dans le cas de la matrice ci-dessous, le choix de développer par rapport à la troisième colonne semble naturel : elle contient deux zéros, ce qui fait que nous n'aurons alors plus qu'un seul déterminant 2×2 à calculer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ = -2(1 \times 8 - 1 \times 2) \\ = -12.$$

On a donc tout intérêt à développer par rapport à une ligne ou une colonne contenant des zéros. Mais que faire quand il n'y pas de zéros, ou très peu ? On peut utiliser la multi-linéarité du déterminant pour essayer d'en créer. Commençons par rappeler que le déterminant d'une matrice peut être vu comme le déterminant de ses colonnes, ou de ses lignes :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{E}}(L_1, \dots, L_n).$$

Proposition 7.6.3. Une combinaison linéaire de colonnes/lignes ne change pas le déterminant. Soient $i < j$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, \dots, L_i, \dots, L_{j-1}, L_j + \lambda L_i, L_{j+1}, \dots, L_n). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité du déterminant par rapport à la j -ème variable, puis d'utiliser le caractère alterné du déterminant :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) + \underbrace{\lambda \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n)}_{=0}, \end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour traiter le cas des lignes. ■

Exemple 7.6.4. La matrice suivante ne possède aucun zéro, mais on peut la transformer pour en obtenir (ici, on retranche deux fois la première ligne à la seconde) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(1 \times 5 - 4 \times 2) = 3.$$

Il est important de ne pas toucher à la ligne/colonne qui est ajoutée/soustraite à une autre : si on modifie les deux en même temps, on ne peut pas utiliser le caractère alterné du déterminant et l'égalité est fausse ! Si on veut modifier une ligne/colonne, par exemple en la multipliant par un scalaire, il faut le faire avant.

Proposition 7.6.5. On peut multiplier une ligne/colonne par un scalaire, à condition de multiplier le déterminant par cette même valeur. Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \det(A) &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) \\ \lambda \det(A) &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, \dots, L_{i-1}, \lambda L_i, L_{i+1}, \dots, L_n). \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la linéarité du déterminant par rapport à la i -ème variable. ■

Certaines matrices ont également le bon goût d'avoir un déterminant facile à calculer. C'est par exemple le cas des matrices diagonales.

Proposition 7.6.6. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Démonstration. On peut par exemple utiliser :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda_1 E_1, \dots, \lambda_n E_n).$$

On utilise la n -linéarité du déterminant pour conclure. ■

Toutes les matrices ne sont bien sûr pas diagonales, mais il est parfois possible d'effectuer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes pour récupérer une telle structure. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'aller aussi loin : une matrice triangulaire suffit.

Proposition 7.6.7. Supposons que A soit triangulaire (supérieure ou inférieure).

Alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est évident pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose alors que $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure, et on développe son déterminant par rapport à la dernière ligne. Comme A est triangulaire supérieure, cette ligne ne contient qu'un seul coefficient non nul et on obtient :

$$\det(A) = a_{n+1,n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On peut alors conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence. Pour une matrice triangulaire inférieure, on peut procéder de la même manière, ou simplement utiliser la transposée. ■

Terminons par un petit rappel : on peut échanger deux lignes ou deux colonnes, à condition de changer le signe.

Proposition 7.6.8. Soient $i < j$. Alors :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= -\det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_{j-1}, L_j, L_{j+1}, \dots, L_n) \\ &= -\det(L_1, \dots, L_{i-1}, L_j, L_{i+1}, \dots, L_{j-1}, L_i, L_{j+1}, \dots, L_n).\end{aligned}$$

Démonstration. On utilise le caractère alterné du déterminant. ■

Exemple 7.6.9. Dans l'exemple suivant, on fait une opération sur la deuxième ligne, puis on échange la deuxième et la troisième lignes pour récupérer une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 18 & 7 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(1 \times 11 \times (-3)) = 33.$$

7.7 Application : méthode de Cramer

Lemme 7.7.1. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ un automorphisme de E et $b \in E$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = b$. Alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_{j-1}), b, f(e_{j+1}), \dots, f(e_n)) = c_j(x) \det(f).$$

Démonstration. On commence par remarquer :

$$b = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n c_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i(x) f(e_i).$$

Ains, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_{j-1}), b, f(e_{j+1}), \dots, f(e_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x) \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_{j-1}), f(e_i), f(e_{j+1}), \dots, f(e_n))}_{=0 \text{ si } i \neq j} \\ &= c_j(x) \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_{j-1}), f(e_j), f(e_{j+1}), \dots, f(e_n)),\end{aligned}$$

d'où le résultat par définition de $\det(f)$. ■

Théorème 7.7.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$. On note $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ les colonnes de A . On note :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_j := (C_1 \cdots C_{j-1} Y C_{j+1} \cdots C_n).$$

Alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_{j1} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

Démonstration. L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension n et l'endomorphisme associé à la matrice A , f_A , est un automorphisme car A est inversible. On applique le [Lemme 7.7.1](#) :

$$X_{j1} \det(A) = X_{j1} \det(f_A) = \det_{\mathcal{E}}(f_A(E_1), \dots, f_A(E_{j-1}), Y, f_A(E_{j+1}), \dots, f_A(E_n)).$$

Or :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f_A(E_i) = AE_i = C_i,$$

d'où le résultat. ■

Exemple 7.7.3. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b := \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Commençons par calculer :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible et le système

$$Ax = b$$

admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On note x_1 et x_2 ses composantes. Pour le calcul de x_1 , on aura besoin de la matrice :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix},$$

et plus précisément de son déterminant :

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 4 - (-10) \cdot 2 = 4.$$

Ainsi :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Reste la deuxième composante, que l'on va calculer à l'aide de la matrice :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - 3 \cdot (-4) = 2,$$

d'où :

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Finalement, on a donc obtenu :

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et on peut en effet vérifier :

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix} = b.$$

Remarque 7.7.4. Si la méthode de Cramer permet d'exprimer les coordonnées de la solution d'un système linéaire avec une formule plutôt élégante, elle est à bannir en pratique, notamment à cause de son coût de calcul faramineux, qui dépasse de loin celui du pivot de Gauss.

7.8 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 7.1

1. La n -linéarité est une conséquence directe de la n -linéarité de L_1 et L_2 , et du fait que F est un espace vectoriel.
2. Même argument que pour la somme.
3. On peut vérifier tous les axiomes : tout découle du fait que F est un espace vectoriel.

Solution de l'Exercice 7.2

Comme s est une symétrie, par définition : $s \circ s = \text{Id}_E$. Ainsi :

$$1 = \det(\text{Id}_E) = \det(s \circ s) = \det(s)^2,$$

d'où le résultat.

Solution de l'Exercice 7.3

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ème colonne de D est $\lambda_j E_j$. Ainsi, par n -linéarité :

$$\det(D) = \det_{\mathcal{E}}(\lambda_1 E_1, \dots, \lambda_n E_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \underbrace{\det_{\mathcal{E}}(E_1, \dots, E_n)}_{=1} = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$