
Notes de cours

Fonctions et calculs

Jérémy Heleine

Licence

Université de Toulouse

Dernière mise à jour : 9 octobre 2026

Pour toute question ou remarque : jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Table des matières

Table des matières	i
1 Langage mathématique	1
1.1 Éléments de logique	1
1.1.1 Assertions	1
1.1.2 Connecteurs logiques	2
1.1.3 Quantificateurs	6
1.2 Raisonnements	7
1.2.1 Raisonnement direct	7
1.2.2 Contre-exemple	9
1.2.3 Disjonction de cas	10
1.2.4 Raisonnement par contraposée	12
1.2.5 Raisonnement par l'absurde	13
1.2.6 Raisonnement par récurrence	14
1.2.7 Raisonnement par analyse-synthèse	16
2 Composées de fonctions	18
2.1 Généralités	18
2.2 Monotonie	19
2.3 Continuité	21
2.4 Dérivabilité	24
3 Ensembles associés à une fonction	29
3.1 Image et réciproque	29
3.2 Injection et surjection	30
3.3 Bijection	33
4 Théorème de la bijection	36
4.1 Bijection réciproque	36
4.2 Exponentielle et logarithme népérien	38
4.3 Propriétés des bijections réciproques	41

5	Réciproques des fonctions trigonométriques	44
5.1	Rappels sur les fonctions trigonométriques	44
5.1.1	Une (rapide) construction géométrique	44
5.1.2	Premières propriétés et valeurs remarquables	44
5.1.3	Identités trigonométriques	46
5.1.4	Tangente	48
5.1.5	Dérivabilité	49
5.1.6	Injectivité, surjectivité	51
5.2	Arccosinus	52
5.3	Arcsinus	53
5.4	Arctangente	54
6	Étude qualitative d'une fonction	55
6.1	Valeurs et variations	55
6.2	Tangentes	57
6.3	Convexité (et concavité)	57
6.4	Restreindre l'étude	61
6.4.1	Parité	61
6.4.2	Périodicité	62
7	Calcul de limites	64
7.1	Rappels	64
7.2	Somme	66
7.3	Produit	68
7.4	Inverse et quotient	71
7.5	Composition	75
7.6	Croissances comparées	76
7.7	Asymptotes	78
8	Intégrale et calcul d'aire	79
8.1	Définition	79
8.2	Propriétés de l'intégrale	81
8.3	Quelques primitives	84
9	Méthodes de calcul d'une intégrale et de primitives	86
9.1	Intégration par parties	86
9.2	Changement de variables	88
9.3	Application à quelques cas particuliers	92
10	Primitivation de fractions rationnelles	94
10.1	Décomposition en éléments simples	94
10.2	Éléments de première espèce	97
10.3	Éléments de seconde espèce	98
10.3.1	Un premier cas	98

10.3.2	Forme canonique et cas général	99
10.4	Exemple récapitulatif	104
11	Une introduction aux nombres complexes	105
11.1	Construction	105
11.2	Conjugaison	111
11.3	Correspondance dans le plan	112
11.4	Module	114
12	Forme exponentielle des nombres complexes	118
12.1	Argument	118
12.2	Formule de Moivre	124
12.3	Exponentielle complexe	127
13	Racines carrées d'un nombre complexe	129
13.1	Racines carrées	129
13.1.1	Rappel : le cas réel	129
13.1.2	Définition	130
13.1.3	Calcul pratique	131
13.2	Équations du second degré	135
14	Formules d'angle multiple et linéarisation	138
14.1	Forme du binôme	138
14.2	Formule d'angle multiple	142
14.3	Linéarisation	145
A	Construction de l'exponentielle	150
A.1	Quelques propriétés	150
A.2	Puissances entières	152
A.3	Racines	153
A.4	Puissances rationnelles	154
A.5	Puissances réelles	156
A.6	Continuité	158
A.7	Exponentielle	159

Chapitre 1

Langage mathématique

1.1 Éléments de logique

1.1.1 Assertions

Définition 1.1.1. Une assertion (ou proposition logique) est un énoncé dont on peut connaître, sans ambiguïté, la valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Exemple 1.1.2. — « L'arbre a des feuilles » est une assertion. Elle dépend d'une variable : on doit préciser l'arbre dont on parle.

- « Il neigera demain » n'est pas une assertion : on ne peut pas vérifier sa véracité.
- « $1 + 1 = 2$ » est une assertion qui ne dépend d'aucune variable.
- « Il existe un entier pair » est une assertion vraie.
- « $P(x) : x^2 \geq 9$ » est une assertion qui dépend de la valeur donnée à x .

Définition 1.1.3. Soient P et Q deux assertions. On dit que P équivaut à Q , et on note « $P \iff Q$ », si :

1. lorsque P est vraie, alors Q est vraie ;
2. lorsque P est fausse, alors Q est fausse.

On dit aussi que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

Remarque 1.1.4. Cette relation est symétrique : affirmer que « $P \iff Q$ » est la même chose qu'affirmer que « $Q \iff P$ ».

Exemple 1.1.5. L'assertion « $x = 1$ » est équivalente à l'assertion « $x + 1 = 2$ ».

Attention, on ne dit jamais que deux assertions sont égales : cela n'a pas de sens.

1.1.2 Connecteurs logiques

Un connecteur logique peut être vu comme une opération agissant sur une ou plusieurs assertions afin d'en former une nouvelle. Il est défini par sa table de vérité qui permet de déterminer la valeur de vérité de cette nouvelle assertion en fonction des valeurs d'entrée. Dans cette section, on se donne P et Q deux assertions.

La conjonction (« et »)

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P et Q	V	F	F	F

TABLE 1.1 – Table de vérité de la conjonction « et ».

L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et si Q est vraie. Elle est fausse dans tous les autres cas.

Exemple 1.1.6. — « $2 \in \mathbb{N}$ et $2 \geq 1$ » est vraie.

— « $2 \in \mathbb{N}$ et $2 < 0$ » est fausse.

La disjonction (« ou »)

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P ou Q	V	V	V	F

TABLE 1.2 – Table de vérité de la disjonction « ou ».

L'assertion « P ou Q » est vraie si au moins l'une des assertions P ou Q est vraie. Elle est fausse sinon (si P et Q sont toutes les deux fausses).

Remarque 1.1.7. Dans le langage mathématique, le « ou » est inclusif.

Exemple 1.1.8. — « $2 \in \mathbb{N}$ ou $2 < 0$ » est vraie.

— « $1 + 1 = 0$ ou $1 < 0$ » est fausse.

Proposition 1.1.9. Soient P , Q et Q' trois assertions. Alors :

$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } Q')) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q')).$$

Démonstration. On compare les tables de vérité de ces deux assertions.

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
Q'	V	F	V	F	V	F	V	F
$Q \text{ ou } Q'$	V	V	V	F	V	V	V	F
$P \text{ et } (Q \text{ ou } Q')$	V	V	V	F	F	F	F	F
$P \text{ et } Q$	V	V	F	F	F	F	F	F
$P \text{ et } Q'$	V	F	V	F	F	F	F	F
$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } Q')$	V	V	V	F	F	F	F	F

■

La négation (« non »)

P	V	F
non P	F	V

TABLE 1.3 – Table de vérité de la négation « non ».

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse. Elle est fausse sinon (si P est vraie).

Exemple 1.1.10. L'assertion « non($2 < 1$) » est vraie, car « $2 < 1$ » est fausse.

Théorème 1.1.11 (Lois de De Morgan). Soient P et Q deux assertions. Alors :

1. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$;
2. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.

Démonstration. 1. On compare les tables de vérité des deux assertions données.

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \text{ ou } Q$	V	V	V	F
non($P \text{ ou } Q$)	F	F	F	V
non(P)	F	F	V	V
non(Q)	F	V	F	V
non(P) et non(Q)	F	F	F	V

2. Là aussi, on compare les tables de vérité des deux assertions données.

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P et Q	V	F	F	F
$\text{non}(P \text{ et } Q)$	F	V	V	V
$\text{non}(P)$	F	F	V	V
$\text{non}(Q)$	F	V	F	V
$\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)$	F	V	V	V

■

L'implication (« $\implies$ »)

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \implies Q$	V	F	V	V

TABLE 1.4 – Table de vérité de l'implication « $\implies$ ».

On peut voir l'implication comme le « cheminement » menant de l'assertion P à l'assertion Q . Une implication est fausse lorsque, à partir d'une assertion vraie, on aboutit à une assertion fausse. Dans tous les autres cas, l'implication est vraie : en particulier, seulement savoir qu'une implication est vraie ne garantit rien sur la valeur de vérité de P ou de Q . Cependant, si l'implication est vraie et que P l'est également, alors on peut être sûrs que Q est vraie. C'est pourquoi l'assertion « $P \implies Q$ » se lit également : si P est vraie, alors Q est vraie.

Exemple 1.1.12. — « $2 = 2 \implies 0 = 0$ » est vraie (on multiplie par 0 des deux côtés).

— « $4 = 4 \implies 2 = -2$ » est fausse ($2^2 = (-2)^2$, mais mauvaise application de la racine carrée).

— « $1 = 2 \implies 0 = 0$ » est vraie (on multiplie par 0).

— « $1 = 2 \implies 2 = 3$ » est vraie (on ajoute 1).

Proposition 1.1.13. Soient P et Q deux assertions. Alors

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } Q).$$

Démonstration. On compare les tables de vérité de ces deux assertions.

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \implies Q$	V	F	V	V
non P	F	F	V	V
non P ou Q	V	F	V	V

■

Définition 1.1.14. L'assertion « $Q \implies P$ » est appelée la réciproque de « $P \implies Q$ ».

Remarque 1.1.15. Ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa réciproque l'est aussi ! Par exemple, l'assertion « si un insecte est une mouche, alors il vole » est vraie, mais sa réciproque, « si un insecte vole, alors c'est une mouche », est fausse.

L'équivalence (« $\iff$ »)

On a déjà vu l'équivalence dans la [Définition 1.1.3](#). On a maintenant de nouveaux outils pour la formaliser un peu plus. Pour être équivalentes, deux assertions doivent être vraies ou fausses simultanément, ce qui peut se traduire par :

$$(P \iff Q) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))).$$

Les cas possibles sont listés dans le [Tableau 1.5](#).

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$P \iff Q$	V	F	F	V

TABLE 1.5 – Table de vérité de l'équivalence « $\iff$ ».

Remarque 1.1.16. Le fait que l'assertion « $P \iff Q$ » soit vraie ne signifie pas pour autant que P et Q sont vraies : elles peuvent aussi être toutes les deux fausses.

Proposition 1.1.17. Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$(P \iff Q) \iff ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)).$$

Démonstration. On part de l'assertion de droite :

$$\begin{aligned}
 ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)) &\iff ((\text{non}(P) \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } P)) \\
 &\iff (((\text{non}(P) \text{ ou } Q) \text{ et } \text{non}(Q)) \\
 &\quad \text{ou } ((\text{non}(P) \text{ ou } Q) \text{ et } P)) \\
 &\iff ((\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } (Q \text{ et } \text{non}(Q))) \\
 &\quad \text{ou } (\text{non}(P) \text{ et } P) \text{ ou } (Q \text{ et } P) \\
 &\iff ((\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } (Q \text{ et } P)) \\
 &\iff (P \iff Q).
 \end{aligned}$$

■

Exemple 1.1.18. — « $(1 = 1) \iff (2 = 2)$ » est vraie.

— « $(1 = 2) \iff (2 = 3)$ » est vraie également.

1.1.3 Quantificateurs

Dans cette section, $P(x)$ désigne une assertion dépendant d'un paramètre x . Les quantificateurs sont un moyen d'écrire qu'une telle assertion est vraie pour certaines valeurs du paramètre.

Le quantificateur « pour tout »

L'assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

est vraie si l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout élément x de l'ensemble E .

Exemple 1.1.19. L'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \in \mathbb{N},$$

est vraie.

Remarque 1.1.20. Attention, il s'agit bien d'affirmer qu'une assertion est vraie pour *tous* les éléments de l'ensemble indiqué. Par exemple, l'assertion suivante est fausse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0.$$

Le quantificateur « il existe »

L'assertion

$$\exists x \in E, P(x)$$

est vraie s'il existe au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel l'assertion $P(x)$ est vraie. Si, de plus, cet élément est unique, on notera

$$\exists!x \in E/P(x).$$

Exemple 1.1.21. — « $\exists n \in \mathbb{N}/n$ est pair » est vraie.

— « $\exists!n \in \mathbb{N}/n$ est pair » est fausse.

— « $\exists!x \in \mathbb{R}/(x \geq 0)$ et $(x \leq 0)$ » est vraie.

Quelques remarques

Comme on l'a vu dans la [Remarque 1.1.20](#), il suffit d'un seul élément pour lequel l'assertion est fausse pour contredire une assertion du type « pour tout ». Autrement dit :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E/\text{non}(P(x)).$$

De la même façon :

$$\text{non}(\exists x \in E/P(x)) \iff \forall x \in E, \text{non}(P(x)).$$

Dans une assertion faisant intervenir plusieurs quantificateurs, l'ordre de ces derniers est important. Par exemple :

— « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}/y < x$ » est une assertion vraie,

— « $\exists y \in \mathbb{R}/\forall x \in \mathbb{R}, y < x$ » est une assertion fausse.

On peut également trouver d'autres exemples :

— « il existe un chien qui, toutes les nuits, aboie »,

— « toutes les nuits, il existe un chien qui aboie »

sont deux assertions différentes (même si la première implique la seconde).

1.2 Raisonnements

1.2.1 Raisonnement direct

Assertion « pour tout »

Pour démontrer une assertion du type

$$\forall x \in E, P(x),$$

on commence le raisonnement par fixer un élément quelconque de l'ensemble E , généralement avec une phrase comme « Soit $x \in E$ ». On cherche ensuite à montrer que $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.2.1. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 > 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, on a alors $x^2 \geq 0$. Ainsi, en ajoutant 1 de chaque côté, on obtient

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien démontré le résultat.

Exemple 1.2.2. Montrons que

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{x+1} < 1.$$

Soit $x > 0$. Comme $0 < 1$, alors $0 + x < 1 + x$, c'est-à-dire $x < x + 1$. De plus, $x > 0$, donc $x + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$ et ainsi :

$$\frac{x}{x+1} < 1.$$

Assertion « il existe »

Pour démontrer une assertion du type

$$\exists x \in E/P(x),$$

il suffit d'exhiber un exemple d'élément x de l'ensemble E pour lequel l'assertion $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.2.3. Montrer que

$$\exists n \in \mathbb{N}/n^2 - \frac{5}{2}n + 1 = 0.$$

Posons $n = 2$. Alors :

$$n^2 - \frac{5}{2}n + 1 = 2^2 - \frac{5}{2} \times 2 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0.$$

Implication

Pour montrer qu'une assertion du type « $P \implies Q$ » est vraie, on suppose que P est vraie et on doit ensuite montrer que Q l'est également, via un cheminement correct.

Exemple 1.2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que

$$(\exists k \in \mathbb{N}/n = 4k) \implies (\exists \ell \in \mathbb{N}/n = 2\ell).$$

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$. Alors :

$$n = (2 \times 2)k = 2 \times (2k).$$

En posant $\ell = 2k \in \mathbb{N}$, on obtient bien $n = 2\ell$.

Équivalence

Pour démontrer une assertion du type « $P \iff Q$ », on peut procéder par double implication : on démontre l'assertion « $P \implies Q$ », puis l'assertion « $Q \implies P$ ».

Exemple 1.2.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$x = 0 \iff x = -x.$$

Dans un premier temps, supposons $x = 0$. Alors :

$$-x = -0 = 0 = x.$$

Réciproquement, supposons que $x = -x$. Alors :

$$x + x = -x + x = 0,$$

c'est-à-dire $2x = 0$, d'où l'on déduit $x = 0$.

1.2.2 Contre-exemple

Pour montrer qu'une assertion du type

$$\forall x \in E, P(x)$$

est fausse, on peut montrer que sa négation est vraie, c'est-à-dire montrer l'assertion

$$\exists x \in E/\text{non}(P(x)).$$

Comme on l'a vu précédemment, il suffit alors d'exhiber un exemple pour lequel cette dernière assertion est vraie, ce qui revient à trouver un contre-exemple à la première assertion.

Exemple 1.2.6. Montrons que l'assertion

tout nombre pair est multiple de 4

est fausse. Prenons par exemple 2. Il s'agit bien d'un nombre pair, qui n'est pas un

multiple de 4, donc l'assertion est fausse.

1.2.3 Disjonction de cas

Partition de l'ensemble

Pour montrer une assertion du type

$$\forall x \in E, P(x),$$

on peut s'appuyer sur une partition de l'ensemble E : on se donne une partie $A \subset E$. On montre alors que l'assertion $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de A , puis pour tous les éléments x n'appartenant pas à A .

Exemple 1.2.7. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1) \text{ est pair.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

Premier cas : n est pair. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Ainsi :

$$n(n+1) = 2k(n+1) = 2\ell$$

avec $\ell := k(n+1) \in \mathbb{N}$, donc $n(n+1)$ est pair.

Second cas : n est impair. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi :

$$n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1),$$

donc

$$n(n+1) = 2n(k+1) = 2\ell$$

avec $\ell := n(k+1) \in \mathbb{N}$, donc $n(n+1)$ est pair.

Exemple 1.2.8. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-2| \leq x^2 - x + 2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

Premier cas : $x \geq 2$. Dans ce cas, $x-2 \geq 0$, donc $|x-2| = x-2$. Ainsi :

$$x^2 - x + 2 - |x-2| = x^2 - x + 2 - (x-2) = x^2 - x + 2 - x + 2 = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 0,$$

donc on a bien $|x-2| \leq x^2 - x + 2$.

Second cas : $x < 2$. Dans ce cas, $x-2 < 0$, donc $|x-2| = -(x-2)$. Ainsi :

$$x^2 - x + 2 - |x-2| = x^2 - x + 2 + x - 2 = x^2 \geq 0,$$

donc on a bien $|x-2| \leq x^2 - x + 2$.

Dans tous les cas, on trouve $|x-2| \leq x^2 - x + 2$, ce qui démontre le résultat.

Remarque 1.2.9. Il est possible de découper en plus de deux cas.

Disjonction

Pour montrer une assertion du type « P ou Q », on peut s'appuyer sur le résultat suivant.

Proposition 1.2.10. Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$(P \text{ ou } Q) \iff (P \text{ ou } (\text{non}(P) \text{ et } Q)).$$

Démonstration. On procède par double implication, ce qui permet en même temps d'interpréter ce résultat.

Dans un premier temps, supposons que « P ou Q » est vraie. Il y a alors deux cas possibles :

1. P est vraie, et dans ce cas « P ou $(\text{non}(P) \text{ et } Q)$ » est vraie (la première partie du « ou » est vraie) ;
2. P est fausse, et dans ce cas Q est vraie (puisque « P ou Q » est vraie) et $\text{non}(P)$ est vraie, donc « $\text{non}(P)$ et Q » est vraie, et ainsi « P ou $(\text{non}(P) \text{ et } Q)$ » est vraie.

Réciproquement, supposons que « P ou $(\text{non}(P) \text{ et } Q)$ » est vraie. Là encore, il y a deux cas possibles :

1. P est vraie, donc « P ou Q » est vraie ;
2. P est fausse, donc « $\text{non}(P)$ et Q » est vraie, donc Q est vraie, et ainsi « P ou Q » est vraie.

■

Pour appliquer ce résultat, l'idée consiste donc à supposer que P est fausse et de montrer, sous cette hypothèse, que Q est vraie.

Exemple 1.2.11. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Supposons que $xy = 0$. Montrons que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Si $x = 0$, le résultat est démontré. Supposons donc $x \neq 0$. On peut alors diviser par x dans l'égalité $xy = 0$ pour obtenir :

$$y = \frac{0}{x} = 0,$$

ce qui termine la preuve.

Exemple 1.2.12. Soient $x > 0$ et $y > 0$. On suppose que $xy \geq 4$. Montrons que :

$$x \geq 2 \quad \text{ou} \quad y \geq 2.$$

Si $x \geq 2$, le résultat est démontré. Supposons donc que $x < 2$ et montrons que $y \geq 2$.

Comme $xy \geq 4$ et que $x > 0$, on a :

$$y \geq \frac{4}{x}.$$

Par ailleurs, $x < 2$, donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. Ainsi :

$$y \geq \frac{4}{x} > \frac{4}{2} = 2,$$

et le résultat est démontré.

1.2.4 Raisonnement par contraposée

Pour montrer une assertion du type « $P \implies Q$ », on peut s'appuyer sur le résultat suivant.

Proposition 1.2.13. Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)).$$

Démonstration. Une manière de démontrer ce résultat est de passer par les tables de vérité. On peut aussi procéder par équivalences :

$$\begin{aligned} (P \implies Q) &\iff (\text{non}(P) \text{ ou } Q) \\ &\iff (Q \text{ ou } \text{non}(P)) \\ &\iff (\text{non}(\text{non}(Q)) \text{ ou } \text{non}(P)) \\ &\iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)). \end{aligned}$$

■

Le concept de contraposée peut sembler quelque peu abstrait, mais il est cependant applicable dans la « vraie vie ». Prenons par exemple une assertion réputée vraie : « tous les corbeaux sont noirs ». On peut transformer cette assertion en implication, en imaginant que l'on se pose la question de ce que l'on a sous les yeux : « si c'est un corbeau, alors c'est noir ». Cette assertion étant vraie, la contraposée l'est également, et est probablement plus utile dans ce cas : « si ce n'est pas noir, ce n'est pas un corbeau ».

Exemple 1.2.14. Soient $x > 0$ et $y > 0$. Montrons que :

$$xy \geq 4 \implies (x \geq 2 \text{ ou } y \geq 2).$$

On procède par contraposée. Supposons que :

$$x < 2 \quad \text{et} \quad y < 2.$$

Alors :

$$xy < 2y < 2 \times 2 = 4,$$

ce qui est bien la négation de la première assertion, donc le résultat est démontré.

1.2.5 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une assertion est vraie, on peut montrer que sa négation amène à une assertion dont on sait qu'elle est fausse. Formellement, cela s'appuie sur le résultat suivant.

Proposition 1.2.15. Soit P une assertion, et soit F une assertion fausse. Alors :

$$P \iff (\text{non}(P) \implies F).$$

Démonstration. On commence par remarquer que, comme F est toujours fausse, la valeur de vérité de « P ou F » est toujours la même que celle de P . Ainsi :

$$\begin{aligned} P &\iff (P \text{ ou } F) \\ &\iff \text{non}(\text{non}(P)) \text{ ou } F \\ &\iff \text{non}(P) \implies F. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.2.16. Montrons que

$$\forall x > 0, \frac{x}{x+1} < 1.$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que

$$\exists x > 0 / \frac{x}{x+1} \geq 1.$$

Soit alors $x > 0$ tel que $\frac{x}{x+1} \geq 1$. Comme $x > 0$, $x+1 > 0$ et ainsi $x \geq x+1$, d'où l'on déduit $0 \geq 1$, ce qui est absurde.

1.2.6 Raisonnement par récurrence

Pour montrer une assertion du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n),$$

on peut commencer par montrer que $P(0)$ est vraie. Ensuite, on montre que l'implication $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.17. Montrons que la propriété

$$P(n): 3^n \geq 2n + 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On procède pour cela par récurrence. Pour $n = 0$, on a d'une part

$$3^n = 3^0 = 1,$$

et d'autre part

$$2n + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$$

donc $P(0)$ est vraie. Considérons maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $3^n \geq 2n + 1$. Ainsi :

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3 \times (2n + 1) = 6n + 3.$$

Réorganisons un peu :

$$6n + 3 = 2n + 4n + 3 = 2n + 2 + 1 + 4n = 2(n + 1) + 1 + 4n.$$

Or, $n \geq 0$, donc $4n \geq 0$ et on obtient :

$$3^{n+1} \geq 6n + 3 \geq 2(n + 1) + 1,$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.18. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$P(n): u_n \geq 0.$$

Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n = 0$, $u_0 = 3$ et on a bien $3 \geq 0$, donc l'assertion $P(0)$ est vraie. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Ainsi, $u_n \geq 0$, d'où $2u_n \geq 0$ et ainsi :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \geq 1 \geq 0,$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on vient donc de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.19. On souhaite montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^n se termine par 2, 4, 6 ou 8.

La première étape est de traduire cette assertion en langage mathématique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N} / \exists k \in \{2, 4, 6, 8\} / 2^n = 10m + k.$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Au rang $n = 1$, on peut écrire :

$$2^1 = 2 = 10 \times 0 + 2,$$

donc l'assertion est vraie. Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$: il existe $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \{2, 4, 6, 8\}$ tels que $2^n = 10m + k$. Ainsi :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times (10m + k) = 10 \times (2m) + 2k.$$

On a bien $2m \in \mathbb{N}$. Cependant, $2k \in \{4, 8, 12, 16\}$ donc on n'a pas encore montré le résultat. On peut remarquer cependant que deux cas sont directs.

Premier cas : $k \in \{2, 4\}$. Dans ce cas, $k \in \{4, 8\}$ donc, en posant $m' = 2m \in \mathbb{N}$ et $k' = 2k \in \{2, 4, 6, 8\}$, on obtient le résultat :

$$2^{n+1} = 10m' + k'.$$

Deuxième cas : $k = 6$. Dans ce cas :

$$2k = 12 = 10 \times 1 + 2.$$

On obtient alors :

$$2^{n+1} = 10 \times (2m) + 10 \times 1 + 2 = 10 \times (2m + 1) + 2.$$

Ainsi, $m' = 2m + 1$ et $k' = 2$ conviennent.

Troisième cas : $k = 8$. On procède comme pour le cas précédent : $m' = 2m + 1$ et $k' = 6$ conviennent.

Remarque 1.2.20. Le principe de récurrence fonctionne sur $\mathbb{N}$ car, pour un entier n donné, on est capables d'identifier précisément son successeur : $n+1$. Pour cette raison, il est absurde de vouloir écrire une récurrence sur $\mathbb{R}$: imaginons que l'on initialise à $x = 0$, comment continuer ? Qui est le « réel venant juste après 0 » ? Il n'y en a aucun, et on ne peut donc pas faire une récurrence.

1.2.7 Raisonnement par analyse-synthèse

Pour montrer une assertion du type

$$\exists x \in E/P(x),$$

on peut procéder en deux étapes. La première est l'étape d'analyse : on suppose qu'un tel élément existe, et on essaie de déterminer des conditions vérifiées par cet élément, qui seront donc des conditions nécessaires à son existence. La seconde étape est la synthèse : on considère les éléments ayant les conditions nécessaires et on vérifie que l'assertion est satisfaite. On élimine les éléments pour lesquels ce n'est pas le cas, et il ne reste que les « vraies » solutions.

Exemple 1.2.21. Soient $S \in \mathbb{R}$ et $D \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\begin{cases} x + y = S, \\ x - y = D. \end{cases}$$

Analyse. Supposons qu'un tel couple (x, y) existe, c'est-à-dire que l'on a $x + y = S$ et $x - y = D$. D'une part :

$$S + D = (x + y) + (x - y) = 2x,$$

d'où l'on déduit :

$$x = \frac{S + D}{2}.$$

D'autre part :

$$S - D = (x + y) - (x - y) = 2y,$$

d'où l'on déduit :

$$y = \frac{S - D}{2}.$$

Ainsi, si un tel couple existe, il s'agit nécessairement de

$$(x, y) = \left(\frac{S + D}{2}, \frac{S - D}{2} \right),$$

ce qui assure l'unicité de la solution.

Synthèse. Posons

$$x := \frac{S + D}{2} \quad \text{et} \quad y := \frac{S - D}{2}.$$

D'une part :

$$x + y = \frac{S + D}{2} + \frac{S - D}{2} = S.$$

D'autre part :

$$x - y = \frac{S + D}{2} - \frac{S - D}{2} = D.$$

Ainsi, le couple (x, y) est bien solution du système : on a obtenu l'existence d'une solution.

Exemple 1.2.22. Montrons que

$$\exists! x \in [-2, +\infty[/ \sqrt{x+2} = x.$$

Supposons qu'il existe $x \in [-2, +\infty[$ tel que $\sqrt{x+2} = x$. En élevant au carré, on obtient alors

$$x + 2 = x^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont -1 et 2 . Ainsi, on a nécessairement

$$x \in \{-1, 2\}.$$

Considérons $x = -1$. Alors :

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1 = x,$$

donc $x = -1$ n'est pas solution de l'équation qui nous intéresse. Considérons maintenant $x = 2$. Alors :

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 = x,$$

donc $x = 2$ est bien solution de l'équation.

En conclusion, il existe un unique $x \in [-2, +\infty[$ tel que $\sqrt{x+2} = x$, donné par $x = 2$.

Chapitre 2

Composées de fonctions

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. Soient E et F deux ensembles. Une fonction f de E vers F , notée $f: E \rightarrow F$, est une règle de calcul qui, à un élément $x \in E$, associe un unique élément $y := f(x) \in F$. Dans ce cas :

- y est l'image de x par f ;
- x est un antécédent de y par f .

Exemple 2.1.2. Un exemple de fonction est donné par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

tandis que ce qui suit n'est pas une fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y^2 = x \end{aligned}$$

puisque l'image d'un réel n'est pas bien définie (par exemple, 1 aurait pour image à la fois 1 et -1).

Définition 2.1.3. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. On appelle domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des éléments de E pour lesquels l'image par f est bien définie.

Exemple 2.1.4. Soit $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$. Pour que l'image d'un réel x soit bien définie, il faut que le terme $\sqrt{x}$ soit bien défini : pour cela, on doit avoir $x \geq 0$. De plus, il faut pouvoir diviser par $x^2 - 1$: pour cela, on doit avoir $x^2 - 1 \neq 0$, donc $x \notin \{-1, 1\}$.

Ainsi :

$$\mathcal{D}_f = [0, +\infty[\setminus \{-1, 1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Définition 2.1.5. Soient E , F et G trois ensembles. Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux fonctions. La composée de f par g , notée $g \circ f$, est la fonction définie par :

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Remarque 2.1.6. On peut exprimer le domaine de définition d'une composée en fonction de ceux des fonctions de départ :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f ; f(x) \in \mathcal{D}_g\}.$$

Exemple 2.1.7. Soient les fonctions :

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x & \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = [0, +\infty[$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \in [0, +\infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq f(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq -x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} ; 0 \geq x\} \\ &=]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.8. En règle générale, $f \circ g \neq g \circ f$. Considérons par exemple :

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 3 & \text{et} \quad x \mapsto x^2 \end{array}$$

de sorte que :

$$\begin{array}{ll} f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3 & \text{et} \quad x \mapsto (x + 3)^2 \end{array}$$

qui sont bien deux fonctions différentes.

2.2 Monotonie

Définition 2.2.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

— f est croissante sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y) ;$$

— f est strictement croissante sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y) ;$$

— f est décroissante sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y) ;$$

— f est strictement décroissante sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y) ;$$

— f est monotone (respectivement strictement monotone) sur I si f est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur I .

Proposition 2.2.2. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont toutes les deux monotones. Alors $g \circ f$ est monotone. Plus précisément :

1. si f et g ont la même monotonie (toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante ;
2. si f et g ont des monotonies différentes, alors $g \circ f$ est décroissante.

De plus, ce résultat reste vrai si on remplace les monotonies par des monotonies strictes.

Démonstration. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$.

1. **Premier cas.** Supposons que f et g sont toutes les deux croissantes. Comme f est croissante, on a alors :

$$f(x) \leq f(y).$$

De plus, g est croissante, donc :

$$g(f(x)) \leq g(f(y)).$$

On reconnaît alors :

$$g \circ f(x) \leq g \circ f(y),$$

ce qui montre que $g \circ f$ est croissante.

Second cas. Supposons que f et g sont toutes les deux décroissantes. Alors :

$$f(x) \geq f(y),$$

et :

$$g(f(x)) \leq g(f(y)),$$

donc $g \circ f$ est croissante.

2. **Premier cas.** Supposons f croissante et g décroissante. Alors :

$$f(x) \leq f(y),$$

et :

$$g(f(x)) \geq g(f(y)),$$

donc $g \circ f$ est décroissante.

Second cas. Supposons f décroissante et g croissante. Alors :

$$f(x) \geq f(y),$$

et :

$$g(f(x)) \geq g(f(y)),$$

donc $g \circ f$ est décroissante.

■

Exemple 2.2.3. On considère la fonction

$$h:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x^3 + 3}$$

dont on cherche à déterminer la monotonie. Pour cela, on introduit les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} & & g:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto x^3 + 3 & \text{et} & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

de sorte que $h = g \circ f$. On peut montrer que f est croissante, tandis que g est décroissante. On en déduit que h est décroissante. Elle est même strictement décroissante : f et g sont strictement monotones.

2.3 Continuité

Définition 2.3.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Proposition 2.3.2. Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I . Alors :

1. la fonction $f + g$ est continue sur I ;
2. la fonction fg est continue sur I ;
3. si on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{1}{g}$ est bien définie et continue sur I ;
4. toujours en supposant que g ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie et est continue sur I .

Démonstration. 1. Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\eta_f > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_f, x_0 + \eta_f[\cap I, \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, g étant continue, il existe $\eta_g > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_g, x_0 + \eta_g[\cap I, \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\eta := \min(\eta_f, \eta_g)$. Pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|.$$

Par définition de η , $x \in]x_0 - \eta_f, x_0 + \eta_f[\cap I$, donc $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Il en va de même pour g , d'où :

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc $f + g$ est continue en x_0 .

2. Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On pose :

$$\alpha := \min\left(\frac{1}{1 + |f(x_0)| + |g(x_0)|}, 1\right).$$

Comme f et g sont continues, on trouve $\eta_f > 0$ et $\eta_g > 0$ tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_f, x_0 + \eta_f[\cap I, |f(x) - f(x_0)| < \alpha\varepsilon,$$

$$\forall x \in]x_0 - \eta_g, x_0 + \eta_g[\cap I, |g(x) - g(x_0)| < \alpha\varepsilon.$$

Soit $\eta := \min(\eta_f, \eta_g)$. Pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &= |(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \\ &< \alpha\varepsilon(|g(x)| + |f(x_0)|). \end{aligned}$$

De plus :

$$|g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| < \alpha\varepsilon + |g(x_0)|.$$

Il reste alors :

$$|(fg)(x) - (fg)(x_0)| < \alpha\varepsilon(\alpha\varepsilon + |g(x_0)| + |f(x_0)|).$$

Or, $\alpha \leq 1$ et $\varepsilon < 1$, donc $\alpha\varepsilon < 1$ et ainsi :

$$|(fg)(x) - (fg)(x_0)| < \alpha\varepsilon(1 + |g(x_0)| + |f(x_0)|).$$

Comme de plus, $\alpha \leq \frac{1}{1+|f(x_0)|+|g(x_0)|}$, on a obtenu :

$$|(fg)(x) - (fg)(x_0)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que fg est continue en x_0 .

3. Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. En notant $y_0 := g(x_0)$, on pose :

$$\eta_i := \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2 + 2\varepsilon|y_0|}\right).$$

Comme g est continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, \quad |g(x) - g(x_0)| < \eta.$$

Soit alors $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$. On note $y := g(x)$. Alors :

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_0 - y}{yy_0}\right| < \frac{\eta_i}{|y||y_0|}.$$

De plus :

$$|y| = |y - y_0 + y_0| \geq |y_0| - |y - y_0| > |y_0| - \eta_i.$$

Comme $\eta_i < |y_0|$, on peut remarquer que $|y_0| - \eta_i > 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| < \frac{\eta_i}{(|y_0| - \eta_i)|y_0|}.$$

Or, $\eta_i \leq \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2+2\varepsilon|y_0|}$ donc, après quelques calculs, on obtient :

$$\frac{\eta_i}{(|y_0| - \eta_i)|y_0|} \leq \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon|y_0|} < \varepsilon,$$

d'où le résultat.

4. C'est une conséquence directe des deux points précédents : f est continue, et $\frac{1}{g}$ également, donc $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ est continue. ■

Proposition 2.3.3. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow J$ une fonction continue sur I et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur J . Alors $g \circ f$ est continue sur I .

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. On note $y_0 := f(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est continue, il existe $\eta_g > 0$ tel que :

$$\forall y \in]y_0 - \eta_g, y_0 + \eta_g[\cap J, \quad |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

De plus, comme f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, \quad |f(x) - f(x_0)| < \eta_g.$$

Soit $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$. On note $y := f(x) \in J$. Par définition de η , on a donc :

$$|y - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \eta_g,$$

donc $y \in]y_0 - \eta_g, y_0 + \eta_g[\cap J$, d'où $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ par définition de η_g . Autrement dit, on vient de montrer :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I, \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $g \circ f$ est continue en x_0 . Comme x_0 est quelconque dans I , cela montre que $g \circ f$ est continue sur I . ■

Exemple 2.3.4. Les fonctions

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[& g: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| + 1 & \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

sont toutes les deux continues. On en déduit que la fonction

$$\begin{array}{l} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{|x| + 1} \end{array}$$

est continue, car $h = g \circ f$.

2.4 Dérivabilité

Définition 2.4.1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en un point $x_0 \in I$ si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

le taux d'accroissement de f en x_0 . On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Exemple 2.4.2. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Considérons $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on utilise la définition de f pour écrire :

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

Comme $f(x) = x^2$, on obtient ainsi :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x.$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$$

Proposition 2.4.3. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors :

1. la fonction $f + g$ est dérivable sur I et

$$(f + g)' = f' + g' ;$$

2. la fonction fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg' ;$$

3. si on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{1}{g}$ est bien définie et dérivable sur I avec :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

4. toujours si on suppose que g ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie et dérivable sur I avec :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit pour que $x + h \in I$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

par dérivabilité de f et de g .

2. Soit $x \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit pour que $x + h \in I$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

par continuité de g et par dérivabilité de f et de g .

3. Soit $x \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit pour que $x + h \in I$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -g'(x) \frac{1}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

par dérivabilité et continuité de g .

4. C'est une conséquence des deux points précédents. Premièrement, g est dérivable et ne s'annule pas, donc $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$. Ensuite, comme f et $\frac{1}{g}$ sont dérivables, $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ est dérivable avec :

$$\left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2},$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.4.4. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur I et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J . Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Démonstration. Soit $x \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit pour avoir $x + h \in I$. On commence par écrire :

$$\frac{(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x + h)) - g(x)}{h} = \frac{g(f(x + h) - f(x) + f(x)) - g(x)}{h}.$$

On pose $\eta := f(x + h) - f(x)$, de sorte que :

$$\frac{(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x) + \eta) - g(f(x))}{h} \frac{\eta}{\eta} = \frac{g(f(x) + \eta) - g(f(x))}{\eta} \frac{\eta}{h}.$$

D'une part, la continuité de f implique :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x + h) - f(x)) = 0,$$

donc la dérivabilité de g implique :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + \eta) - g(f(x))}{\eta} = g'(f(x)).$$

D'autre part, la dérivabilité de f implique :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

On a donc obtenu :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x)}{h} = g'(f(x))f'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x).$$

■

Exemple 2.4.5. On s'intéresse à la fonction

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$$

dont on peut déjà vérifier qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 > 0$ et ainsi $h(x)$ est bien défini. On peut l'exprimer comme la composée de deux fonctions :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[\quad \text{et} \quad g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + x^2 \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

qui permettent d'écrire $h = g \circ f$. Les fonctions f et g sont toutes les deux dérivables, donc h est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de plus :

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Or :

$$f'(x) = 2x,$$

et :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

donc :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Chapitre 3

Ensembles associés à une fonction

3.1 Image et réciproque

Définition 3.1.1. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. Soit $y \in F$. On appelle antécédent de y par f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On note $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y :

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x \in E ; f(x) = y\}.$$

Remarque 3.1.2. L'ensemble des antécédents d'un élément peut ne contenir aucun élément, tout comme il peut en contenir un seul, plusieurs, ou même une infinité.

Exemple 3.1.3. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, \quad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset.$$

Exemple 3.1.4. Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x). \end{aligned}$$

Alors :

$$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{1\}) = \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 3.1.5. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction.

— Soit $A \subset E$. L'ensemble image de A par f , noté $f(A)$, est le sous-ensemble de F

des images de tous les éléments de A par f :

$$f(A) := \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F ; \exists x \in A / f(x) = y\}.$$

— Soit $B \subset F$. L'image réciproque de B par f , noté $f^{-1}(B)$, est le sous-ensemble de E des antécédents de tous les éléments de B par f :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E ; f(x) \in B\}.$$

Exemple 3.1.6. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

On cherche à déterminer $f([1, 2])$. On peut par exemple procéder comme suit, en prenant $x \in [1, 2]$. Comme $1 \leq x \leq 2$, alors $2 \leq 2x \leq 4$, et donc $3 \leq f(x) \leq 5$. Ainsi, $f([1, 2]) = [3, 5]$.

Si on cherche à déterminer une image réciproque, il faut plutôt « remonter ». Par exemple, cherchons à calculer $f^{-1}([1, 2])$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on commence par écrire $f(x) \in [1, 2]$, c'est-à-dire $1 \leq f(x) \leq 2$, ou encore $1 \leq 2x + 1 \leq 2$. Ainsi, $0 \leq 2x \leq 1$, et donc $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Autrement dit, $f^{-1}([1, 2]) = [0, \frac{1}{2}]$.

Dans l'exemple précédent, on aurait très bien pu s'intéresser uniquement aux bornes des intervalles considérés. Attention cependant, si la fonction n'est pas monotone, on ne peut pas garantir que cette technique fonctionnera. On peut par exemple considérer l'exemple suivant.

Exemple 3.1.7. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

On cherche à déterminer $f([-1, 1])$. En étudiant cette fonction sur cet intervalle, on peut remarquer qu'elle est décroissante sur $[-1, 0]$, puis croissante sur $[0, 1]$. Elle atteint donc un minimum en $x = 0$, qui vaut $f(0) = 0$. Comme $f(-1) = f(1) = 1$, son maximum vaut 1, et on a donc $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

3.2 Injection et surjection

Définition 3.2.1. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est injective (ou que f

est une injection) si tout élément de F a au plus un antécédent par f , c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x) = f(y) \implies x = y).$$

Exemple 3.2.2. La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

est injective. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors :

$$2x + 1 = 2y + 1,$$

et ainsi $x = y$.

Exemple 3.2.3. La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas injective. En effet, $f(1) = f(-1)$. Cependant, la fonction

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est injective.

Proposition 3.2.4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.

Démonstration. Soit $(x, y) \in I^2$. On souhaite montrer :

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

On va pour cela procéder par contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer :

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Supposons donc $x \neq y$. Alors $x < y$ ou $y < x$. Quitte à échanger les rôles de x et y , on peut supposer $x < y$. Comme f est strictement monotone, on a alors $f(x) < f(y)$ (si f est croissante) ou $f(x) > f(y)$ (si f est décroissante). Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$, donc le résultat est démontré. ■

Exemple 3.2.5. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 e^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On peut montrer que cette fonction est strictement croissante. En effet, soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $x < y$. Alors $x^2 < y^2$, et $e^{\sqrt{x}} < e^{\sqrt{y}}$. Comme $e^{\sqrt{x}} > 0$, on obtient $f(x) < f(y)$. Comme f est strictement croissante, on déduit du résultat précédent qu'elle est injective.

Remarque 3.2.6. Dire qu'une fonction est injective n'implique pas que tout élément de l'ensemble image admet un antécédent : « au plus un » signifie bien « un ou moins ». Il peut donc y avoir des éléments qui n'admettent aucun antécédent. Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est injective, et pourtant -1 n'a aucun antécédent par g .

On pourrait se demander si la réciproque du résultat précédent est vraie : si une fonction est injective, est-elle nécessairement strictement monotone ? La réponse est oui, mais seulement si cette fonction est également continue.

Proposition 3.2.7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Alors f est strictement monotone.

Démonstration. Supposons que f ne soit pas strictement monotone. Alors il existe $(x_1, x_2, x_3) \in I^3$ tel que $x_1 < x_2 < x_3$ et :

$$(f(x_1) \leq f(x_2) \text{ et } f(x_2) \geq f(x_3)) \quad \text{ou} \quad (f(x_1) \geq f(x_2) \text{ et } f(x_2) \leq f(x_3)).$$

Pour fixer les choses, supposons :

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ et } f(x_2) \geq f(x_3),$$

l'autre cas se traitant de manière similaire. On pose $b := f(x_2)$ et $a := \max(f(x_1), f(x_3))$. Alors $a \leq b$. Soit $y \in [a, b]$. Comme

$$f(x_1) \leq a \leq b = f(x_2),$$

et que f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha_1 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(\alpha_1) = y$. De la même façon, il existe $\alpha_2 \in [x_2, x_3]$ tel que $f(\alpha_2) = y$. En particulier, $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ce qui contredit l'injectivité de f . Ainsi, f est strictement monotone. ■

Définition 3.2.8. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) si tout élément de F a au moins un antécédent par f , c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y.$$

Exemple 3.2.9. La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 3 \end{aligned}$$

est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = y - 3$. Alors :

$$f(x) = x + 3 = (y - 3) + 3 = y,$$

donc on a trouvé un antécédent à y par f .

Exemple 3.2.10.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas surjective : -1 n'admet aucun antécédent par f . Cependant, la fonction

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est surjective : pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par g .

Remarque 3.2.11. Les définitions impliquent facilement l'équivalence suivante :

$$f \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad f(E) = F.$$

3.3 Bijection

Définition 3.3.1. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) si elle est injective et surjective. Autrement dit, si :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E / f(x) = y.$$

Exemple 3.3.2. La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

est à la fois injective et surjective, donc bijective.

Remarque 3.3.3. Lorsqu'une bijection existe entre deux ensembles, alors ils possèdent le même nombre d'éléments.

Prenons un exemple concret pour illustrer cette dernière remarque. Imaginons une salle de cours dans laquelle chaque chaise est occupée par une et une seule personne. On peut considérer la fonction qui, à chaque personne, associe la chaise sur laquelle elle est assise. Chaque chaise ne peut être occupée que par une seule personne : cela signifie que cette fonction est injective. De plus, toutes les chaises sont occupées, donc la fonction est surjective. Autrement dit, il y a bijection : sans les compter, on sait donc qu'il y a autant de chaises que de personnes présentes.

Exemple 3.3.4. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Surjection. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geq 0$, on pose $n := 2m$. Comme $m \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et, par définition, n est pair. Ainsi :

$$\varphi(n) = \frac{n}{2} = \frac{2m}{2} = m,$$

donc n est un antécédent de m . Si $m < 0$, on pose $n := -2m - 1$. Comme $m \leq -1$, $n \geq 1$, donc on a bien $n \in \mathbb{N}$ et, par définition, n est impair. Ainsi :

$$\varphi(n) = -\frac{n+1}{2} = -\frac{-2m-1+1}{2} = m,$$

donc n est un antécédent de m . Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on trouve un antécédent de m par φ , donc φ est surjective.

Injection. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(n) = \varphi(m)$.

— Supposons n et m tous les deux pairs. Alors :

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{2},$$

d'où $n = m$.

— Supposons n et m tous les deux impairs. Alors :

$$-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2},$$

d'où $n = m$.

- Supposons n pair et m impair (le cas n impair et m pair se traite de la même façon). Alors :

$$\frac{n}{2} = -\frac{m+1}{2},$$

d'où $n = -(m+1)$. Or, $m \geq 0$, donc ceci implique $n < 0$, ce qui est absurde puisque $n \in \mathbb{N}$, donc ce cas est impossible : on ne peut avoir $\varphi(n) = \varphi(m)$.

Dans tous les cas, si $\varphi(n) = \varphi(m)$, alors $n = m$, donc φ est injective.

Bijection. On a montré que φ est à la fois surjective et injective, elle est donc bijective.

Chapitre 4

Théorème de la bijection

4.1 Bijection réciproque

Proposition 4.1.1. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $g: F \rightarrow E$ telle que :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, (f \circ g)(y) = y.$$

Dans ce cas, g est unique et est également bijective.

Démonstration. Supposons f bijective. On définit $g: F \rightarrow E$ en posant, pour tout $y \in F$, $g(y) = x$ où $x \in E$ est tel que $f(x) = y$: comme f est surjective, un tel élément existe et, comme f est injective, cet élément est unique, donc g est bien définie. Cette définition entraîne immédiatement les deux propriétés attendues.

Réciproquement, supposons qu'il existe une telle fonction g . Soit $y \in F$. Alors :

$$y = (f \circ g)(y) = f(g(y)).$$

En posant $x := g(y)$, on obtient ainsi $f(x) = y$, donc f est surjective. Soit maintenant $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Par définition de g , on obtient donc $x_1 = x_2$. Ainsi, f est injective.

Unicité de g . Soient $g_1: F \rightarrow E$ et $g_2: F \rightarrow E$ deux fonctions telles que :

$$\forall x \in E, (g_1 \circ f)(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, (f \circ g_1)(y) = y,$$

et :

$$\forall x \in E, (g_2 \circ f)(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F, (f \circ g_2)(y) = y.$$

Soit $y \in F$. Par définition de g_1 et de g_2 , on a alors :

$$(f \circ g_1)(y) = y \quad \text{et} \quad (f \circ g_2)(y) = y,$$

et ainsi $(f \circ g_1)(y) = (f \circ g_2)(y)$, c'est-à-dire $f(g_1(y)) = f(g_2(y))$. Or, f est injective, donc $g_1(y) = g_2(y)$. Comme y est quelconque, on a donc obtenu $g_1 = g_2$.

La fonction g est bijective. Soit $x \in E$. On note $y := f(x) \in F$. Alors :

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y),$$

donc g est surjective. Soit maintenant $(y_1, y_2) \in F^2$ tel que $g(y_1) = g(y_2)$. Alors $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$, c'est-à-dire $(f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2)$. Par définition de g , on obtient alors $y_1 = y_2$, donc g est injective. ■

Définition 4.1.2. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction bijective. La fonction g définie dans la Proposition 4.1.1 est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1} .

Remarque 4.1.3. Si une fonction f est bijective, on montre facilement que la réciproque de sa réciproque est elle-même, c'est-à-dire $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 4.1.4. Soient

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 1 & \text{et} & y \mapsto \frac{y - 1}{2}. \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors :

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = x.$$

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(g(y)) = f\left(\frac{y - 1}{2}\right) = 2\frac{y - 1}{2} + 1 = y.$$

Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 4.1.5. Soient

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ & & g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 & \text{et} & y \mapsto \sqrt{y}. \end{array}$$

On peut vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

et :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f(g(y)) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

donc $g = f^{-1}$.

Remarque 4.1.6. Dans un repère orthonormé, les graphes d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

4.2 Exponentielle et logarithme népérien

Lemme 4.2.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(0)f(x)$$

avec $f(0) \neq 0$. Alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)f(-x) \end{aligned}$$

qui est dérivable puisque f l'est. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(0)f(x)f(-x) - f(x)f(0)f(-x) = 0,$$

donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0) = f(0)^2.$$

En revenant à l'expression de g , on a donc obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(-x) = f(0)^2.$$

Comme $f(0) \neq 0$, ceci montre donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0.$$

■

Théorème 4.2.2. Il existe une unique fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)$$

et satisfaisant $f(0) = 1$.

Démonstration. L'existence peut être montrée via l'[annexe A](#). Supposons qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant ces hypothèses. Par le lemme précédent, elles ne s'annulent pas, donc on peut définir $h := \frac{f}{g}$ qui est dérivable car f et g le sont. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$$

par hypothèse sur f et g . Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

donc $f = g$. ■

Définition 4.2.3. La fonction satisfaisant les propriétés du [Théorème 4.2.2](#) est appelée fonction exponentielle et est notée $\exp$.

Proposition 4.2.4. La fonction exponentielle satisfait :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \exp(x)^{-1}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.

Démonstration. 1. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la fonction

$$\begin{aligned} f_y : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} \end{aligned}$$

qui est bien définie car $\exp$ ne s'annule pas. De plus, $\exp$ est dérivable, donc f_y est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_y(x) = \frac{\exp'(x + y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = f_y(x).$$

De plus :

$$f_y(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1.$$

Par unicité de la fonction exponentielle, on en déduit $f_y = \exp$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = \exp(x),$$

ce qui montre cette première relation puisque y est quelconque.

2. On utilise la relation précédente. Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \exp(-x),$$

d'où le résultat.

3. On utilise encore la première relation. Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

qui est bien strictement positif puisque $\exp$ ne s'annule pas. ■

Remarque 4.2.5. En utilisant le premier résultat, on peut obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(nx) = \exp(x)^n,$$

ce qui se démontre par récurrence.

Remarque 4.2.6. La fonction exponentielle étant strictement positive et étant sa propre dérivée, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.7. La fonction exponentielle satisfait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

Démonstration. Comme $\exp(0) = 1$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, il existe $t > 0$ tel que $\exp(t) > 1$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\exp(t) > 1$, la suite $(\exp(t)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \exp(t)^n \geq M.$$

Soit alors $X := Nt$. Pour tout $x \geq X$, on a $\exp(x) \geq \exp(X)$ puisque $\exp$ est croissante. Or :

$$\exp(X) = \exp(Nt) = \exp(t)^N \geq M.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp(-y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(y)} = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 4.2.8. La fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}_*^+$. En particulier, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est bijective.

Démonstration. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est donc injective. Par ailleurs, sa limite en $-\infty$ est 0 et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, donc le théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_*^+$. ■

Définition 4.2.9. La bijection réciproque de la fonction $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est appelée logarithme népérien et est notée $\ln$.

4.3 Propriétés des bijections réciproques

Proposition 4.3.1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow J$ une bijection. Si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f .

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante (le cas où f est strictement décroissante se traite de la même manière). On va montrer par contraposée que f^{-1} est également strictement croissante. Soit pour cela $(y_1, y_2) \in J^2$. On note $x_1 := f^{-1}(y_1)$ et $x_2 := f^{-1}(y_2)$. Supposons que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Autrement dit, $x_1 \geq x_2$. Comme f est croissante, on obtient $f(x_1) \geq f(x_2)$, ce qui se réécrit $y_1 \geq y_2$, et ainsi f^{-1} est strictement croissante. ■

Théorème 4.3.2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow J$ une bijection. Si f est continue, alors f^{-1} est continue.

Démonstration. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $d \in]0, \varepsilon]$ tel que $]x_0 - d, x_0 + d[\subset I$. Comme f est injective et continue, elle est strictement monotone. Pour fixer les choses, supposons qu'elle soit strictement croissante. Alors :

$$f(x_0 - d) < f(x_0) < f(x_0 + d).$$

Ainsi :

$$\delta^- := f(x_0) - f(x_0 - d) > 0 \quad \text{et} \quad \delta^+ := f(x_0 + d) - f(x_0) > 0.$$

On pose $\delta := \min(\delta^-, \delta^+) > 0$. Soit $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$. Autrement dit :

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta.$$

Or :

$$y_0 + \delta = f(x_0) + \delta \leq f(x_0) + \delta^+ = f(x_0 + d),$$

et :

$$y_0 - \delta = f(x_0) - \delta \geq f(x_0) - \delta^- = f(x_0 - d).$$

Ainsi :

$$f(x_0 - d) < y < f(x_0 + d).$$

Comme f est strictement croissante, f^{-1} est aussi strictement croissante, et ainsi :

$$x_0 - d < f^{-1}(y) < x_0 + d.$$

On a donc obtenu :

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < d \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que f^{-1} est continue en y_0 . ■

Théorème 4.3.3. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \rightarrow J$ une bijection. Soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0 . Supposons que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 := f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. Soit $y \in J$. Comme f est surjective, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. On peut noter que, par continuité de f , quand x tend vers x_0 , y tend vers y_0 . Ainsi :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0)}.$$
■

Exemple 4.3.4. La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule nulle part. Ainsi, $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

Exemple 4.3.5. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

La fonction f est bijective, sa bijection réciproque n'étant autre que la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y &\mapsto \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. La fonction f est dérivable en x avec $f'(x) = 2x$. Comme $x \neq 0$, $f'(x) \neq 0$. On en déduit que f^{-1} est dérivable au point $y = f(x)$, avec :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Exemple 4.3.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

est strictement croissante, donc injective. De plus, $f_n(0) = 0$ et f_n tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc f_n est surjective. Ainsi f_n est bijective et on peut définir sa bijection réciproque. On note $x^{1/n} := f_n^{-1}(x)$. Comme f_n est dérivable et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, (f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n f_n^{-1}(x)^{n-1}} = \frac{1}{n \frac{f_n^{-1}(x)^n}{f_n^{-1}(x)}} = \frac{1}{n \frac{x}{x^{1/n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Chapitre 5

Réciproques des fonctions trigonométriques

5.1 Rappels sur les fonctions trigonométriques

5.1.1 Une (rapide) construction géométrique

On considère le cercle unité :

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

On admet que, en tant que courbe, le cercle unité admet une longueur finie, que l'on note temporairement $L > 0$. On définit π comme étant la moitié de la longueur du cercle :

$$\pi := \frac{L}{2}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $M(t) \in \mathbb{S}^1$ le point obtenu en partant du point $(1, 0)$ et en parcourant le cercle unité, dans le sens anti-horaire si $t > 0$ ou horaire si $t < 0$, jusqu'à obtenir un arc de cercle de longueur $|t|$. On définit $\cos(t)$ comme l'abscisse de ce point, et $\sin(t)$ est son ordonnée :

$$M(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

5.1.2 Premières propriétés et valeurs remarquables

Proposition 5.1.1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1, \quad -1 \leq \cos(t) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1.$$

Démonstration. Pour $t \in \mathbb{R}$, $(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{S}^1$ donc, par définition :

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

Ainsi :

$$\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2 \leq 1,$$

ce qui implique

$$|\cos(t)| \leq 1,$$

d'où l'encadrement du cosinus. L'encadrement du sinus s'obtient de la même manière. ■

En reprenant la définition, on peut déjà calculer quelques valeurs de manière exacte. Par exemple, pour $t = 0$, on doit créer un arc de cercle de longueur 0 à partir du point $(1, 0)$. Autrement dit, on ne bouge pas :

$$(\cos(0), \sin(0)) = (1, 0).$$

Par définition, π est la longueur du demi-cercle. En partant de $(1, 0)$, on arrive donc à l'opposé :

$$(\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0).$$

Comme π est la longueur de demi-cercle, $\frac{\pi}{2}$ est la longueur d'un quart de cercle, ce qui nous donne :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 1), \quad \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, -1).$$

Continuons à couper π : avec $\frac{\pi}{4}$, on coupe le quart de cercle en deux. On obtient la bissectrice, d'équation $y = x$. Comme on cherche un point sur le cercle unité, on cherche donc un point satisfaisant

$$y = x \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Ainsi :

$$2x^2 = 1,$$

d'où :

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{4} > 0$, on a parcouru le cercle dans le sens anti-horaire, donc on obtient :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

On peut aussi fixer une coordonnée et en déduire la deuxième. Fixons par exemple $x = \frac{1}{2}$. Alors :

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Si on cherche un point dans le premier quart de cercle, on obtient alors $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Notons A ce point. On note $O = (0, 0)$ l'origine et $I = (1, 0)$. Calculons

$$AI^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ainsi, $AI = 1$. Or, A et I sont situés sur le cercle unité, donc $OA = 1$ et $OI = 1$. Autrement dit, $OA = OI = AI$, donc le triangle OIA est équilatéral. L'angle recherché est donc $\frac{\pi}{3}$:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

En fixant $y = \frac{1}{2}$, on obtient $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit le symétrique du point précédent par rapport à la première bissectrice. L'angle t recherché vérifie donc

$$\frac{\pi}{4} - t = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4},$$

donc $t = \frac{\pi}{6}$:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

TABLE 5.1 – Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus.

5.1.3 Identités trigonométriques

Proposition 5.1.2. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Démonstration. On note $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$, et on définit $A = (\cos(a), \sin(a))$ ainsi que $B = (\cos(b), \sin(b))$. Soit, de plus, $C = (\cos(a - b), \sin(a - b))$. Le triangle OIC peut être vu comme la rotation du triangle OBA (d'angle $-b$). Par conséquent, $AB = IC$, et donc $AB^2 = IC^2$. Calculons ces deux quantités :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (\cos(b) - \cos(a))^2 + (\sin(b) - \sin(a))^2 \\ &= \cos(b)^2 - 2\cos(a)\cos(b) + \cos(a)^2 + \sin(b)^2 - 2\sin(a)\sin(b) + \sin(a)^2 \\ &= 2 - 2\cos(a)\cos(b) - 2\sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

car $\cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$ et $\cos(b)^2 + \sin(b)^2 = 1$,

$$\begin{aligned} IC^2 &= (x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2 \\ &= (\cos(a - b) - 1)^2 + \sin(a - b)^2 \\ &= \cos(a - b)^2 - 2\cos(a - b) + 1 + \sin(a - b)^2 \\ &= 2 - 2\cos(a - b) \end{aligned}$$

car $\cos(a-b)^2 + \sin(a-b) = 1$. On obtient ainsi le résultat. ■

Proposition 5.1.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. On utilise l'identité précédente :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et on conclut pour la première relation avec les valeurs connues de $\cos$ et $\sin$ en $\frac{\pi}{2}$. On utilise cette première relation pour obtenir la seconde :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Proposition 5.1.4. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a).$$

Démonstration. On utilise ce qui précède :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(a-b - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(a - \left(b + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(a) \cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a) \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Or, $\sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(b)$. De plus :

$$\begin{aligned}\cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(b - \frac{-\pi}{2}\right) \\ &= \cos(b) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin(b) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin(b),\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 5.1.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Démonstration. On utilise les identités précédentes :

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(0 - x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x) = \cos(x), \\ \sin(-x) &= \sin(0 - x) = \sin(0)\cos(x) - \sin(x)\cos(0) = -\sin(x).\end{aligned}$$

■

Proposition 5.1.6. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence de tout ce qui précède, en remarquant que $a + b = a - (-b)$. ■

Proposition 5.1.7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Démonstration. On obtient $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$ géométriquement, en remarquant que 2π est un tour complet du cercle. Il est aussi possible d'écrire $2\pi = \pi + \pi$ et d'utiliser les identités trigonométriques pour obtenir ces valeurs. Ces mêmes identités permettent de conclure. ■

5.1.4 Tangente

Ajoutons au graphique du cercle unité la droite d'équation $x = 1$. Considérons un point A du cercle de coordonnées (x, y) telles que x et y sont dans $]0, 1[$. On obtient un angle $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$. On note $O = (0, 0)$. La demi-droite $[OA)$ coupe la droite $x = 1$ en un point T . On définit l'ordonnée de ce point comme étant $\tan(t)$: $T = (1, \tan(t))$.

Ajoutons le point $C = (\cos(t), 0)$ et le point $I = (1, 0)$. Dans cette configuration, on peut appliquer le théorème de Thalès pour obtenir :

$$\frac{OC}{OI} = \frac{CA}{IT},$$

soit :

$$\frac{\cos(t)}{1} = \frac{\sin(t)}{\tan(t)},$$

ce qui nous donne

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.$$

Ceci nous amène à la définition :

$$\begin{aligned} \tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.8. Pour tout $x \in D_{\tan}$:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Démonstration. On utilise les identités trigonométriques déjà obtenues :

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x) \cos(\pi) + \sin(\pi) \cos(x)}{\cos(x) \cos(\pi) - \sin(x) \sin(\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

■

5.1.5 Dérivabilité

Lemme 5.1.9. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin(x) < x < \tan(x).$$

Démonstration. On définit les points $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$, $A = (\cos(x), \sin(x))$, $C = (\cos(x), 0)$ et $T = (1, \tan(x))$. On remarque que le triangle OCA est strictement inclus dans le secteur de disque OIA . Autrement dit, l'aire du triangle est strictement inférieure à l'aire du secteur :

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2},$$

ce qui nous donne la première partie de l'inégalité. Pour la seconde partie, on remarque que ce même secteur de disque est strictement inclus dans le triangle OIT . ■

Proposition 5.1.10. Le sinus satisfait

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Proposition 5.1.11. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on utilise le lemme qui précède :

$$\sin(x) < x < \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Comme toutes ces quantités sont strictement positives, on peut passer à l'inverse :

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)},$$

et ainsi :

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Or, quand $x \rightarrow 0^+$, $\cos(x) \rightarrow 1$, donc le théorème des gendarmes implique

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Écrivons maintenant :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y}.$$

Comme $\sin(-y) = -\sin(y)$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

ce qui permet de conclure.

Lemme 5.1.12. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 avec :

$$\cos'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin'(0) = 1.$$

Démonstration. La dérivabilité du sinus en 0 est une conséquence directe du résultat précédent :

$$\frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Pour le cosinus, il faut transformer un peu :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} &= \frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\cos(h)^2 - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= -\frac{\sin(h)^2}{h(\cos(h) + 1)} = -\frac{\sin(h)}{h} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 5.1.13. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. On écrit le taux d'accroissement pour la fonction cosinus :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin(x),\end{aligned}$$

et on fait de même avec la fonction sinus :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x).\end{aligned}$$

■

Exercice 5.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Proposition 5.1.14. La fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition avec :

$$\forall x \in D_{\tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2.$$

Démonstration. Comme $\cos$ et $\sin$ sont dérivables et que $\cos$ ne s'annule pas sur le domaine de définition de $\tan$, la fonction $\tan$ est dérivable et :

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2,$$

d'où le résultat. ■

5.1.6 Injectivité, surjectivité

Comme $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ et que $\cos$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure la surjectivité de $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. De plus :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cos'(x) = -\sin(x) < 0,$$

donc $\cos$ est strictement décroissante, et ainsi injective, sur $[0, \pi]$. De la même façon, on montre que $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective et injective.

Remarque 5.1.15. Attention, $\cos$ et $\sin$ ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$ tout entier ! Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi)$, et il en est de même pour $\sin$.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0$, donc $\tan$ est strictement croissante, donc injective, sur cet intervalle. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

donc, par continuité de $\tan$, le théorème des valeurs intermédiaires donne la surjectivité de $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$.

5.2 Arccosinus

Sur l'intervalle $[0, \pi]$, la fonction cosinus est strictement décroissante et est donc injective. Ainsi, $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

Définition 5.2.1. La bijection réciproque de $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est appelée arccosinus :

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

La définition d'une bijection réciproque donne directement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) &= x, \\ \forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) &= x. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in [0, \pi] \times [-1, 1], \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos(y).$$

Proposition 5.2.2. La fonction arccosinus est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0, \pi]$, avec $\cos' = -\sin$. Cependant, $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, donc on ne peut pas considérer l'intervalle fermé pour $\arccos$. On obtient alors la dérivabilité de $\arccos$ sur $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a alors :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Rappelons que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1,$$

donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sin(y) = \pm \sqrt{1 - \cos(y)^2}.$$

Dans notre cas, on obtient :

$$\sin(\arccos(x)) = \pm \sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Or, par définition, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$. Donc :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2},$$

ce qui permet de conclure. ■

5.3 Arcsinus

Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est strictement croissante, donc injective. Ainsi, $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

Définition 5.3.1. La bijection réciproque de $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est appelée arcsinus :

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Par définition, on obtient directement :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) &= x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) &= x. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1, 1], \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y).$$

Proposition 5.3.2. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Démonstration. La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $\sin' = \cos$. Cependant, $\cos$ s'annule aux bords de cet intervalle, donc on considère seulement $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a alors :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Or :

$$\cos(\arcsin(x)) = \pm \sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Par définition, $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction cosinus est positive, donc :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2},$$

et on peut alors conclure. ■

5.4 Arctangente

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente est strictement croissante et continue, donc $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

Définition 5.4.1. La bijection réciproque de $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée arctangente :

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

On peut obtenir directement de la définition :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) &= x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) &= x. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) = y \iff x = \arctan(y).$$

Proposition 5.4.2. La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Démonstration. La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0,$$

donc $\tan'$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a de plus :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$
■

Chapitre 6

Étude qualitative d'une fonction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à quelques propriétés des fonctions nous permettant de déterminer l'allure de leurs graphes. Pour une fonction f donnée, on notera $\mathcal{C}_f$ son graphe, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Il est important de noter que l'on ne cherche pas à reproduire précisément le graphe d'une fonction, mais déterminer son allure peut permettre de mieux comprendre son comportement.

6.1 Valeurs et variations

Par définition même du graphe d'une fonction, il est immédiat que connaître certaines valeurs de la fonction permet de déterminer par quels points passe son graphe.

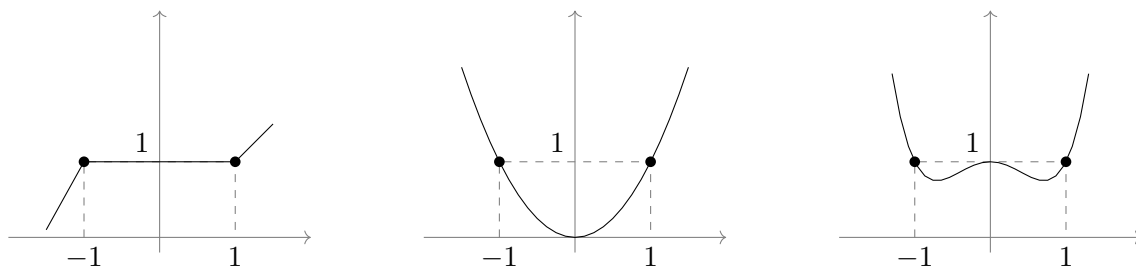
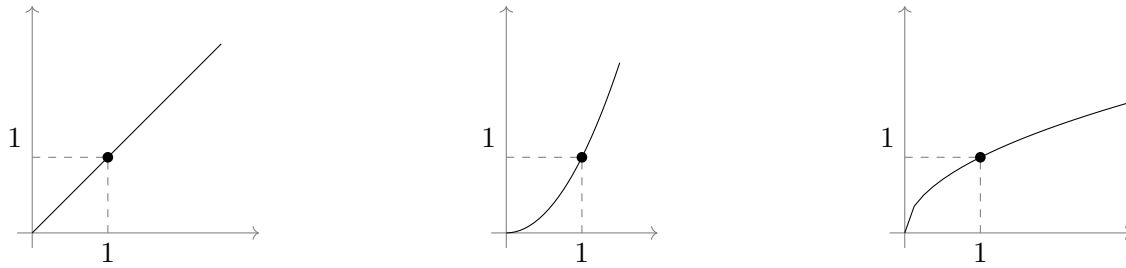


FIGURE 6.1 – Quelques exemples de fonctions passant par les mêmes points.

De même, calculer les limites de la fonction aux bords de son domaine de définition nous permet de savoir le comportement du graphe au voisinage de ces points.

Comme l'illustrent les exemples précédents, savoir par où passe la fonction n'est pas toujours suffisant pour réellement comprendre son comportement. Il serait par exemple utile de savoir si, entre deux points, la fonction est monotone ou non. On peut pour cela dresser le tableau de variations de la fonction pour déterminer sur quels intervalles elle est croissante ou décroissante.

FIGURE 6.2 – Quelques exemples de fonctions passant par le même point et tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.

Proposition 6.1.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons que f' est de signe constant sur I . Alors f est monotone sur I . Plus précisément :

1. si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I ;
2. si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I ;
3. si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I ;
4. si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration. On traite le cas où $f' \geq 0$, les autres cas se traitant de la même manière. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis, on trouve $c \in [x, y]$ tel que :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Or, par hypothèse, $f'(c) \geq 0$. Comme $x < y$, $y - x > 0$ et ainsi :

$$f(y) - f(x) \geq 0,$$

donc f est croissante. ■

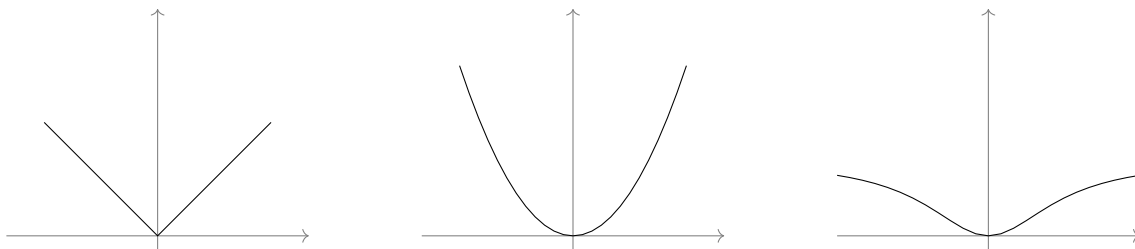


FIGURE 6.3 – Quelques exemples de fonctions décroissantes puis croissantes.

6.2 Tangentes

Géométriquement, la tangente à la courbe de f en un point $a \in I$ est une droite qui, « localement », ne touche cette courbe qu'en ce point. Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Graphiquement, une tangente permet de décrire le comportement de la courbe de f : en un point d'abscisse a , on sait que cette courbe va « frôler » la tangente, donc une droite de coefficient directeur $f'(a)$.



FIGURE 6.4 – Deux fonctions admettant une tangente de pente 1 en 1.

6.3 Convexité (et concavité)

Définition 6.3.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est convexe si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

On dit que f est concave si la fonction $-f$ est convexe.

Exemple 6.3.2. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est convexe. En effet, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et soit $t \in [0, 1]$. D'une part :

$$f(ta + (1 - t)b) = (ta + (1 - t)b)^2 = t^2a^2 + 2t(t - 1)ab + (1 - t)^2b^2.$$

D'autre part :

$$tf(a) + (1 - t)f(b) = ta^2 + (1 - t)b^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b) &= t(1 - t)a^2 + (1 - t)(1 - (1 - t))b^2 - 2t(t - 1)ab \\ &= t(1 - t)a^2 + t(1 - t)b^2 - 2t(t - 1)ab \\ &= t(1 - t)(a - b)^2. \end{aligned}$$

On a toujours $(a - b)^2 \geq 0$. De plus, comme $t \in [0, 1]$, on a également $t(1 - t) \geq 0$ et ainsi on obtient l'inégalité voulue.

Lemme 6.3.3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$. Alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Démonstration. Comme $y \in]x, z[$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$y = tx + (1 - t)z.$$

Comme f est convexe, ceci implique :

$$f(y) \leq tf(x) + (1 - t)f(z).$$

D'une part, on obtient alors :

$$f(y) - f(x) \leq (1 - t)(f(z) - f(x)).$$

Comme $y - x > 0$, ceci implique :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq (1 - t) \frac{f(z) - f(x)}{y - x}.$$

Or :

$$y - x = tx + (1 - t)z - x = (1 - t)(z - x),$$

d'où la première partie de l'inégalité.

D'autre part :

$$f(y) - f(z) \leq t(f(x) - f(z)),$$

c'est-à-dire :

$$t(f(z) - f(x)) \leq f(z) - f(y).$$

Comme $z - y > 0$, on obtient :

$$t \frac{f(z) - f(x)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Or :

$$z - y = z - tx - (1 - t)z = t(z - x),$$

d'où la seconde partie de l'inégalité. ■

Proposition 6.3.4. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Soit $z \in]x, y[$. D'une part, considérons $h \in]0, \frac{z-x}{2}[$, de sorte que $x < x+h < z$. Par le [Lemme 6.3.3](#), on obtient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x}.$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient alors :

$$f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x}.$$

D'autre part, considérons $h \in]0, \frac{y-z}{2}[$, de sorte que $z < y-h < y$. Par le [Lemme 6.3.3](#), on obtient :

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leq \frac{f(y) - f(y-h)}{h} = \frac{f(y-h) - f(y)}{-h}.$$

Faire tendre h vers 0 donne ici :

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leq f'(y).$$

Ainsi :

$$f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leq f'(y),$$

donc $f'(x) \leq f'(y)$ et ainsi f' est croissante.

Réciproquement, supposons que f' est croissante. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Soit $t \in]0, 1[$. On pose $z := tx + (1-t)y \in]x, y[$. On applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, z]$: il existe $u \in [x, z]$ tel que

$$f'(u) = \frac{f(z) - f(x)}{z-x}.$$

De même, il existe $v \in [z, y]$ tel que

$$f'(v) = \frac{f(y) - f(z)}{y-z}.$$

Par définition, $u \leq v$. Comme f' est croissante, on obtient alors :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} = f'(u) \leq f'(v) = \frac{f(y) - f(z)}{y-z}.$$

Notons maintenant que :

$$z-x = (1-t)(y-x) \quad \text{et} \quad y-z = t(y-x).$$

Ainsi :

$$\frac{f(z) - f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{t(y-x)}.$$

Comme $y - x > 0$, on obtient :

$$\frac{f(z) - f(x)}{1 - t} \leq \frac{f(y) - f(z)}{t},$$

ce qui se réécrit :

$$t(f(z) - f(x)) \leq (1 - t)(f(y) - f(z))$$

car $t > 0$ et $1 - t > 0$. En réorganisant les termes, on obtient :

$$f(z) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

ce qui donne la convexité de f en revenant à la définition de z . ■

Remarque 6.3.5. En appliquant ce résultat à $-f$, on montre que f est concave si et seulement si f' est décroissante.

Corollaire 6.3.6. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du résultat précédent. En effet, f est convexe si et seulement si f' est croissante, et f' est croissante si et seulement si $f'' = (f')'$ est positive. ■

Terminons cette série de résultats par une caractérisation de la convexité via la position du graphe d'une fonction et de ses tangentes.

Proposition 6.3.7. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration. Supposons f convexe. Soit $a \in I$, et soit $x \in I \setminus \{a\}$. Si $x > a$, on a déjà établi :

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

d'où :

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a),$$

et ainsi :

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Si $x < a$, on écrit :

$$f'(a) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x},$$

ce qui mène à la même inégalité.

Réciproquement, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Soit $t \in [0, 1]$. On pose $z := tx + (1 - t)y$. Comme le graphe de f est au-dessus de ses tangentes, on a, en considérant la tangente au point z :

$$f(x) \geq f'(z)(x - z) + f(z) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f'(z)(y - z) + f(z).$$

Comme $t \geq 0$ et $1 - t \geq 0$, on obtient alors :

$$tf(x) \geq tf'(z)(x - z) + tf(z) \quad \text{et} \quad (1 - t)f(y) \geq (1 - t)f'(z)(y - z) + (1 - t)f(z).$$

On somme alors ces deux inégalités :

$$\begin{aligned} tf(x) + (1 - t)f(y) &\geq tf'(z)(x - z) + tf(z) + (1 - t)f'(z)(y - z) + (1 - t)f(z) \\ &= f'(z)(t(x - z) + (1 - t)(y - z)) + (t + (1 - t))f(z) \\ &= f'(z)((1 - t)(x - y) + t(y - x)) + f(z) \\ &= f'(z)(tx + (1 - t)y) \\ &= f(tx + (1 - t)y) \end{aligned}$$

par définition de z , d'où le fait que f est convexe. ■

Définition 6.3.8. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si f change de convexité en x_0 .

Des résultats précédents, on peut tirer des caractérisations plus intéressantes si f est suffisamment régulière. Ainsi, si f est dérivable et que x_0 est un point d'inflexion, alors la tangente en x_0 traverse la courbe de f en ce point. Si f est deux fois dérivable, alors x_0 est un point d'inflexion si et seulement si $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 .

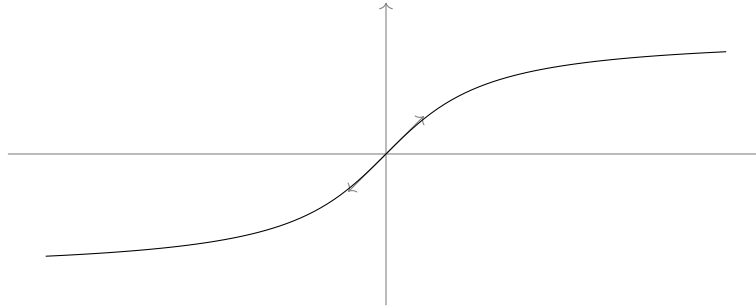


FIGURE 6.5 – La fonction arctangente admet un point d'inflexion en 0.

6.4 Restreindre l'étude

6.4.1 Parité

Définition 6.4.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est paire si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

On dit que f est impaire si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Graphiquement, le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, tandis que le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine. Autrement dit, si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier son comportement sur $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$).

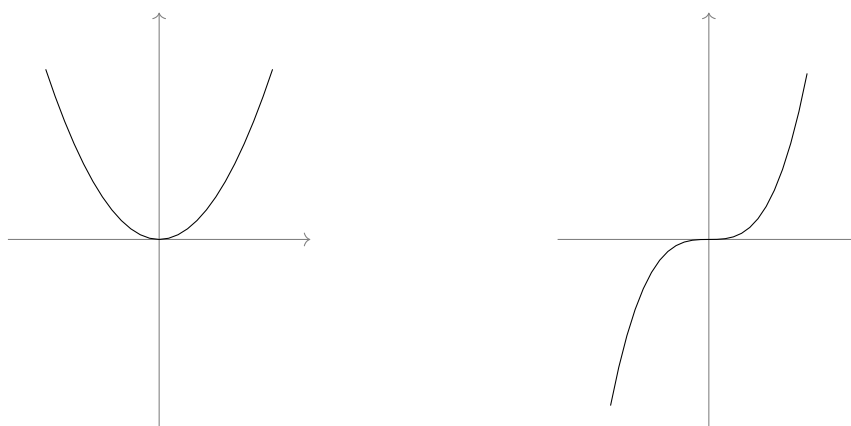


FIGURE 6.6 – La fonction carré est paire, tandis que la fonction cube est impaire.

Remarque 6.4.2. Il se peut qu'une fonction ne soit ni paire ni impaire mais présente tout de même des symétries par rapport à d'autres points ou droites. Par exemple, le graphe de la fonction $x \mapsto (x - 2)^2$ est symétrique par rapport à la droite $x = 2$.

6.4.2 Périodicité

Définition 6.4.3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

Dans ce cas, on dit que f est T -périodique.

Le graphe d'une fonction périodique présente un motif qui se répète. Il suffit ainsi d'étudier son comportement sur une période (par exemple, sur l'intervalle $[0, T]$), puis de translater le graphe obtenu pour obtenir le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

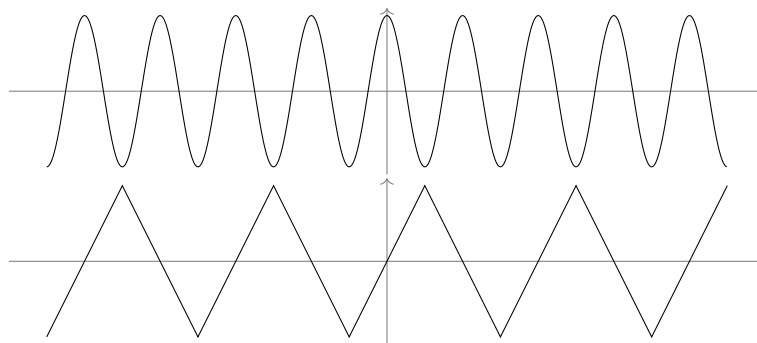


FIGURE 6.7 – Exemples de fonctions périodiques.

Chapitre 7

Calcul de limites

7.1 Rappels

Définition 7.1.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet une limite finie en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Définition 7.1.2. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f tend vers l'infini en a si elle tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \quad f(x) > M,$$

ou si elle tend vers $-\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \quad f(x) < M.$$

On notera :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty,$$

selon le signe de cette limite.

Définition 7.1.3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite finie en $+\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in [X, +\infty[, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

auquel cas on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

On dit que f admet une limite finie en $-\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in]-\infty, X], \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

auquel cas on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell.$$

Définition 7.1.4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l'infini en $+\infty$ si elle tend vers $+\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in [X, +\infty[, \quad f(x) > M,$$

ou si elle tend vers $-\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in [X, +\infty[, \quad f(x) < M.$$

On notera :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty,$$

selon le signe de cette limite.

Similairement, on dit que f tend vers l'infini en $-\infty$ si elle tend vers $+\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in]-\infty, X], \quad f(x) > M,$$

ou si elle tend vers $-\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in]-\infty, X], \quad f(x) < M.$$

On notera :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \pm\infty,$$

selon le signe de cette limite.

On peut citer pour finir un cas particulier de la limite finie où l'on peut préciser si la fonction considérée tend vers cette limite « par valeurs supérieures » ou « par valeurs inférieures ».

Définition 7.1.5. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ par valeurs supérieures si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in [X, +\infty[, \quad \ell < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ par valeurs inférieures si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \in \mathbb{R} / \forall x \in [X, +\infty[, \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell.$$

Cette définition peut également être adaptée en $-\infty$ ou en n'importe quel point.

7.2 Somme

Proposition 7.2.1. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \ell + \ell'.$$

Démonstration. Supposons $a \in \mathbb{R}$ (les autres cas se traitent de manière similaire). Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur f , il existe $\eta_f > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta_f, a + \eta_f[, \quad |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, on trouve $\eta_g > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta_g, a + \eta_g[, \quad |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On définit alors $\eta := \min(\eta_f, \eta_g)$. Pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on a :

$$|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| = |f(x) - \ell + g(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Proposition 7.2.2. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \pm\infty.$$

Démonstration. Supposons $a = +\infty$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (les autres cas se traitent de manière similaire). Soit $M > 0$. Par hypothèse sur f , il existe $X_f \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_f, +\infty[, \quad |f(x) - \ell| < \frac{M}{2}.$$

Par hypothèse sur g , il existe $X_g \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_g, +\infty[, \quad g(x) > \frac{3M}{2} - \ell.$$

Soit alors $X := \max(X_f, X_g)$. Pour $x \in]X, +\infty[$, on a :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) > \ell - \frac{M}{2} + \frac{3M}{2} - \ell = M.$$

■

Proposition 7.2.3. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \pm\infty.$$

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

les autres cas se traitant de manière similaire. Soit $M \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur f , il existe $X_f \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_f, +\infty[, \quad f(x) > \frac{M}{2},$$

et, par hypothèse sur g , il existe $X_g \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_g, +\infty[, \quad g(x) > \frac{M}{2}.$$

Ainsi, en posant $X := \max(X_f, X_g)$, on obtient, pour $x \in]X, +\infty[$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

■

Remarque 7.2.4. Le terme de « forme indéterminée » ne signifie pas que la limite n'existe pas : il signifie simplement que nous ne pouvons pas conclure de manière générale, et qu'il faut regarder au cas par cas. Par exemple, si on considère $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto -x$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

$\lim g(x) \backslash \lim f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

TABLE 7.1 – Récapitulatif du résultat de la somme de deux limites. Ici, ℓ et ℓ' désignent des réels quelconques, et FI signifie « forme indéterminée » : dans ces cas-là, on ne peut pas conclure directement.

Cependant, avec $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto -x^2$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-x^2) = -\infty.$$

Quant au choix de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto -x$, il mène à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-x) = +\infty.$$

On peut même citer $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto -x + \sin(x)$ pour lequel :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty,$$

et où la limite en $+\infty$ de $f+g$ n'existe pas.

7.3 Produit

Proposition 7.3.1. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell\ell'.$$

Démonstration. Supposons que $a \in \mathbb{R}$ (les autres cas se traitent de la même manière). Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$\alpha := \max \left(1, \frac{1}{1 + |\ell| + |\ell'|} \right).$$

Par hypothèse sur f , il existe $\eta_f > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta_f, a + \eta_f[, \quad |f(x) - \ell| < \alpha\varepsilon.$$

De même, on trouve $\eta_g > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta_g, a + \eta_g[, \quad |g(x) - \ell'| < \alpha\varepsilon.$$

On pose $\eta := \min(\eta_f, \eta_g)$. Pour $x \in]a - \eta, a + \eta[$:

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - \ell\ell'| &= |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\ell'| \\ &= |(f(x) - \ell)g(x) + \ell(g(x) - \ell')| \\ &\leq |f(x) - \ell||g(x)| + |\ell||g(x) - \ell'| \\ &< \alpha\varepsilon|g(x)| + |\ell|\alpha\varepsilon \\ &= \alpha\varepsilon(|g(x)| + |\ell|). \end{aligned}$$

Or :

$$|g(x)| = |g(x) - \ell' + \ell'| \leq |g(x) - \ell'| + |\ell'| < \alpha\varepsilon + |\ell'|.$$

Ainsi :

$$|(fg)(x) - \ell\ell'| < \alpha\varepsilon(\alpha\varepsilon + |\ell'| + |\ell|).$$

Par définition de α , $\alpha \leq 1$ et on a également choisi $\varepsilon < 1$, donc :

$$|(fg)(x) - \ell\ell'| < \alpha\varepsilon(1 + |\ell'| + |\ell|).$$

Toujours par définition de α , on obtient alors :

$$|(fg)(x) - \ell\ell'| < \varepsilon.$$

■

Proposition 7.3.2. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) \in \{-\infty, +\infty\},$$

le signe dépendant du signe de ℓ et de celui de la limite de g .

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$, que g tend vers $+\infty$ et que $\ell > 0$ (on traite les autres cas de manière similaire). Soit $M > 0$. Il existe $X_f \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_f, +\infty[, \quad |f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

et ainsi :

$$\forall x \in]X_f, +\infty[, \quad f(x) > \frac{\ell}{2}.$$

Par ailleurs, il existe $X_g \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_g, +\infty[, \quad g(x) > \frac{2M}{\ell}.$$

Soit $X := \max(X_f, X_g)$. Pour $x \in]X, +\infty[$:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) > \frac{\ell}{2} \frac{2M}{\ell} = M,$$

car $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$. ■

Proposition 7.3.3. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) \in \{-\infty, +\infty\},$$

le signe dépendant des signes des limites de f et g .

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

les autres cas pouvant se traiter de manière similaire. Soit $M > 0$. Il existe $X_f \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_f, +\infty[, \quad f(x) > \sqrt{M},$$

et il existe $X_g \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X_g, +\infty[, \quad g(x) > \sqrt{M}.$$

Ainsi, avec $X := \max(X_f, X_g)$, pour $x \in]X, +\infty[$:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) > \sqrt{M}\sqrt{M} = M.$$
■

Remarque 7.3.4. Comme dans le cas de la somme de deux limites, le terme de « forme indéterminée » signifie qu'on ne peut pas conclure en général. Par exemple, considérons $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = 1.$$

On peut considérer un autre exemple où la limite du produit tend vers 0. Avec $f: x \mapsto x$

$\lim f(x) \backslash \lim g(x)$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

TABLE 7.2 – Récapitulatif du résultat du produit de deux limites. Ici, ℓ et ℓ' désignent des réels, et FI signifie « forme indéterminée » : dans ces cas-là, on ne peut pas conclure directement.

et $g: x \mapsto \frac{1}{x^2}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = 0.$$

Mais on peut aussi obtenir une limite infinie. Avec $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = +\infty.$$

Enfin, avec $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto \frac{1}{x} \sin(x)$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

mais fg n'admet aucune limite en $+\infty$.

7.4 Inverse et quotient

Lemme 7.4.1. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$ (on pourra traiter les autres cas de manière similaire). Soit $\varepsilon > 0$. On définit

$$\eta_i := \min \left(\frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon |\ell|^2}{2 + 2\varepsilon |\ell|} \right) > 0.$$

On trouve alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, \quad |g(x) - \ell| < \eta_i.$$

Pour $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on a alors :

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - g(x)}{\ell g(x)} \right| < \frac{\eta_i}{|\ell| |g(x)|}.$$

Or :

$$|g(x)| = |g(x) - \ell + \ell| \geq |\ell| - |g(x) - \ell| > |\ell| - \eta_i.$$

Par définition de η_i , $|\ell| - \eta_i > 0$, donc :

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \frac{\eta_i}{|\ell|(|\ell| - \eta_i)}.$$

On utilise alors la seconde borne de η_i pour conclure. ■

Proposition 7.4.2. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de résultats déjà vus. Comme $\ell' \neq 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell'},$$

et il suffit alors d'appliquer le produit des limites. ■

Lemme 7.4.3. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^\pm.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty.$$

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+,$$

les autres cas étant similaires. Soit $M > 0$. Il existe $X \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]X, +\infty[, \quad 0 < g(x) < \frac{1}{M}.$$

Ainsi, pour $x \in]X, +\infty[$:

$$\frac{1}{g(x)} > M.$$

■

Proposition 7.4.4. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \{0^-, 0^+\}.$$

Supposons de plus que :

$$(\exists \ell \in \mathbb{R}^* / \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \{-\infty, +\infty\},$$

le signe dépendant des signes des limites de f et g .

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent et des résultats sur les produits de limites. ■

Lemme 7.4.5. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0^\pm.$$

Démonstration. Supposons que $a = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

les autres cas pouvant être traités de la même manière. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $X \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]X, +\infty[, \quad g(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0,$$

d'où, pour $x \in]X, +\infty[$:

$$0 < \frac{1}{g(x)} < \varepsilon.$$

■

Proposition 7.4.6. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui ne s'annule pas. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme précédent et des résultats sur les produits de limites. ■

$\lim f(x) \backslash \lim g(x)$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	ℓ/ℓ'	0	ℓ/ℓ'	$-\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	ℓ/ℓ'	0	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	0	FI	FI

TABLE 7.3 – Récapitulatif du résultat du quotient de deux limites (f/g). Ici, ℓ et ℓ' désignent des réels, et FI signifie « forme indéterminée » : dans ces cas-là, on ne peut pas conclure directement.

Remarque 7.4.7. Encore une fois, pour les formes indéterminées, il est nécessaire de travailler au cas par cas. Pour les formes indéterminées du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », les mêmes exemples que pour le produit peuvent être utilisés. On trouve des exemples similaires pour des formes indéterminées du type « $\frac{0}{0}$ ». Par exemple, $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto x$ amène à :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Avec $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto x^2$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

Pourtant, avec $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto x$, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Enfin, avec $f: x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g: x \mapsto x$, on a toujours :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

mais $\frac{f}{g}$ n'admet aucune limite en 0.

7.5 Composition

Proposition 7.5.1. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons qu'il existe $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell.$$

Démonstration. Supposons que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, les autres cas pouvant être traités de manière similaire. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_g > 0$ tel que :

$$\forall y \in]b - \eta_g, b + \eta_g[, \quad |g(y) - \ell| < \varepsilon.$$

On trouve alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, \quad |f(x) - b| < \eta_g.$$

Pour $x \in]a - \eta, a + \eta[$, on a donc $f(x) \in]b - \eta_g, b + \eta_g[$. Ainsi :

$$|(g \circ f)(x) - \ell| = |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon.$$

■

Exemple 7.5.2. On souhaite déterminer la limite (si elle existe) de la fonction

$$h:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

en $+\infty$. On peut pour cela définir

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin(x)$$

de sorte que $h = g \circ f$. D'une part :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

D'autre part :

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin(y) = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

Exemple 7.5.3. Ce résultat peut aussi être utilisé pour effectuer des changements de variables dans les limites. Considérons par exemple une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mais on peut l'écrire autrement. Posons

$$y := x + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x,$$

de sorte que $h = y - x$. On obtient ainsi :

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

7.6 Croissances comparées

Il existe des cas particuliers de formes indéterminées que l'on peut traiter « facilement ». C'est l'objet des résultats qui suivent.

Théorème 7.6.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable et, en particulier, admet une tangente en 0 dont l'équation est donnée par :

$$y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1.$$

Or, la fonction exponentielle est convexe, donc son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes, et donc en particulier au-dessus de sa tangente en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1.$$

Soit $x > 0$. On applique ce qui précède :

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1 > \frac{x}{n+1}.$$

Ainsi :

$$e^x = (e^{\frac{x}{n+1}})^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = Cx^{n+1},$$

avec $C := \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$. On obtient alors :

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{Cx^{n+1}}{x^n} = Cx \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

■

Théorème 7.6.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration. On pose :

$$y := -x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

On obtient :

$$x^n e^x = (-1)^n (-x)^n e^{-(-x)} = (-1)^n y^n e^{-y} = (-1)^n \frac{y^n}{e^y}.$$

Or :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^n} = +\infty,$$

donc :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0,$$

d'où l'on tire le résultat.

■

Théorème 7.6.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

Démonstration. On pose :

$$y := \ln(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Alors :

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\frac{1}{n}y}{e^y} = \frac{1}{n} \frac{y}{e^y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où le résultat.

■

Théorème 7.6.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0.$$

Démonstration. On pose :

$$y := \ln(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty.$$

Alors :

$$x^n \ln(x) = \frac{1}{n} y e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0,$$

d'où le résultat. ■

7.7 Asymptotes

Définition 7.7.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$. On définit de manière similaire une asymptote horizontale en $-\infty$.

Définition 7.7.2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. S'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0,$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. On définit de manière similaire une asymptote oblique en $-\infty$.

Définition 7.7.3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f en a .

Chapitre 8

Intégrale et calcul d'aire

8.1 Définition

Définition 8.1.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F' = f$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 8.1.2. Soit $F: x \mapsto ax + b$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = a.$$

Ainsi, F est une primitive de $x \mapsto a$.

Exemple 8.1.3. Comme $\exp' = \exp$, on trouve que $\exp$ est une primitive de $\exp$.

Lemme 8.1.4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Toute primitive de la fonction identiquement nulle sur I est constante.

Démonstration. Soit $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = 0.$$

Soit $a \in I$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in I$ tel que :

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(c) = 0.$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = F(a).$$

■

Proposition 8.1.5. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soient $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de f . Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C.$$

Démonstration. Soit $H := G - F$. Alors $H' = G' - F' = f - f = 0$, donc H est constante par le lemme précédent, ce qui termine la preuve. ■

Définition 8.1.6. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . On appelle intégrale de f entre a et b la quantité :

$$\int_a^b f(t) \, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 8.1.7. La Proposition 8.1.5 assure que la définition précédente ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, considérons F et G deux primitives de f . Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad G(x) = F(x) + C.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \, dt &= F(b) - F(a) = F(b) + C - C - F(a) \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) = G(b) - G(a), \end{aligned}$$

donc on calcule bien la même quantité, quelle que soit la primitive choisie.

On peut interpréter l'intégrale de manière géométrique comme une certaine aire. C'est l'objet du résultat suivant qui sera admis.

Théorème 8.1.8. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. L'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à

$$\int_a^b f(t) \, dt \text{ unités d'aire.}$$

Exemple 8.1.9. Soit $f: x \mapsto x$. On peut calculer

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Graphiquement, la surface comprise entre la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ n'est autre que le triangle formé par les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. C'est un triangle rectangle dont on peut calculer l'aire facilement, et on retrouve alors la valeur précédente.

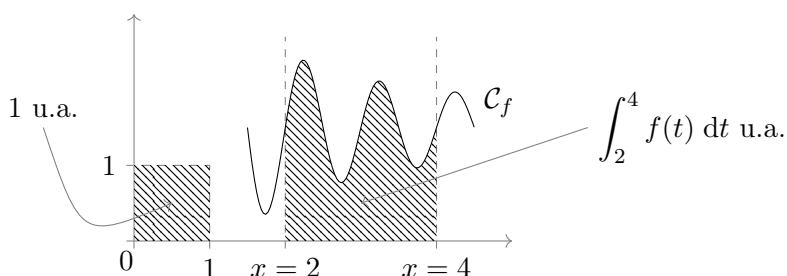


FIGURE 8.1 – Graphiquement, un calcul d'intégrale permet de déterminer une aire.

Remarque 8.1.10. L'aire calculée à l'aide d'une intégrale est une aire « algébrique » : elle possède un signe. Pour une fonction négative, on obtiendra une « aire » négative. Si on veut retrouver une aire au sens géométrique du terme, c'est-à-dire une quantité positive, il faut intégrer la valeur absolue de la fonction.

8.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 8.2.1. Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt,$$

et :

$$\int_a^b (\lambda f(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Soient $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f et $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de g . Alors :

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

donc $F + G$ est une primitive de $f + g$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + g(t)) \, dt &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

donc on trouve :

$$\int_a^b (\lambda f(t)) \, dt = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(t) \, dt.$$

■

Exemple 8.2.2. On souhaite calculer :

$$I = \int_1^2 (4t + 3) \, dt.$$

La linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_1^2 t \, dt + 3 \int_1^2 1 \, dt \\ &= 4 \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 + 3[t]_1^2 \\ &= 4 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + 3(2 - 1) \\ &= 6 + 3 = 9. \end{aligned}$$

Proposition 8.2.3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Si f est positive, alors

$$\int_a^b f(t) \, dt \geq 0.$$

Démonstration. Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

Or, $a < b$ et $F' = f \geq 0$, donc F est croissante, et ainsi $F(a) \leq F(b)$, d'où le résultat. ■

Corollaire 8.2.4. Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $a < b$. Si $f \leq g$, alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec la fonction $g - f$. En effet, si $f \leq g$, alors cette fonction est positive, donc son intégrale l'est également, d'où le résultat en appliquant la linéarité de l'intégrale. ■

Proposition 8.2.5 (Relation de Chasles). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $c \in [a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt.$$

Démonstration. Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \, dt &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \\ &= \int_c^b f(t) \, dt + \int_a^c f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Exemple 8.2.6. Soit $f: x \mapsto |x - 2|$. On souhaite calculer

$$I = \int_0^4 f(t) \, dt = \int_0^4 |t - 2| \, dt.$$

On remarque que, pour $x \geq 2$, $x - 2 \geq 0$, donc $f(x) = |x - 2| = x - 2$. De même, pour $x \leq 2$, $f(x) = -(x - 2) = 2 - x$. On utilise alors la relation de Chasles :

$$I = \int_0^2 f(t) \, dt + \int_2^4 f(t) \, dt = \int_0^2 (2 - t) \, dt + \int_2^4 (t - 2) \, dt.$$

On calcule ensuite ces deux intégrales séparément pour obtenir $I = 4$.

Proposition 8.2.7 (Inégalité de la moyenne). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a).$$

Démonstration. Soient les fonctions

$$\begin{array}{ccc} g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} & & g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto m & \text{et} & x \mapsto M \end{array}$$

de sorte que :

$$\forall x \in [a, b], \quad g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x).$$

On applique alors le [Corollaire 8.2.4](#) :

$$\int_a^b g_1(t) \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g_2(t) \, dt.$$

Or, la fonction $x \mapsto mx$ est une primitive de g_1 sur $[a, b]$, donc :

$$\int_a^b g_1(t) \, dt = [mt]_a^b = mb - ma = m(b-a).$$

De même :

$$\int_a^b g_2(t) \, dt = M(b-a),$$

d'où le résultat. ■

Définition 8.2.8. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ la quantité :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt.$$

8.3 Quelques primitives

Les tableaux suivants listent quelques expressions de fonctions dont on connaît les primitives. Pour vérifier la véracité de ces informations, il suffit de dériver les expressions proposées.

Expression de f	Domaine de définition	Expression d'une primitive
x^a pour $a \neq -1$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$	$\ln(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_*^+$	$x \ln(x) - x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$\arcsin(x)$

TABLE 8.1 – Quelques primitives classiques.

Expression de f	Expression d'une primitive
$u'(x)u(x)^a$ pour $a \neq -1$	$\frac{u(x)^{a+1}}{a+1}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$

TABLE 8.2 – Quelques primitives de fonctions composées.

Chapitre 9

Méthodes de calcul d'une intégrale et de primitives

9.1 Intégration par parties

Théorème 9.1.1. Soient $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables de dérivées continues. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t) \, dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) \, dt.$$

Démonstration. Comme f et g sont dérivables, leur produit fg est également dérivable et :

$$\forall x \in [a, b], \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Autrement dit, fg est une primitive de la fonction $f'g + fg'$. Ainsi :

$$\int_a^b (f'g + fg')(x) \, dx = [(fg)(x)]_a^b = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Or, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f'g + fg')(x) \, dx = \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx,$$

d'où le résultat. ■

Exemple 9.1.2. On souhaite calculer

$$I := \int_0^{2\pi} x \cos(x) \, dx.$$

On pose $f: x \mapsto x$ et on doit alors identifier g telle que $g' = \cos$. On obtient $g = \sin$.

La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x)g'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)g(x) \, dx \\ &= [x \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx \\ &= -[-\cos(x)]_0^{2\pi} = -(-\cos(2\pi) + \cos(0)) = 0. \end{aligned}$$

Exemple 9.1.3. On souhaite calculer

$$I = \int_0^{\pi} \cos(t) \sin(t) \, dt.$$

En posant $f = \cos$ et $g' = \sin$, on reconnaît :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} f(t)g'(t) \, dt = [f(t)g(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(t)g(t) \, dt \\ &= [-\cos(t)^2]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(t) \, dt = -I, \end{aligned}$$

d'où :

$$I = 0.$$

Exemple 9.1.4. On souhaite déterminer une primitive de $u: t \mapsto te^t$ sur $[0, +\infty[$. Soit pour cela $x \in [0, +\infty[$. On cherche à calculer

$$I = \int_0^x te^t \, dt.$$

On pose $f: t \mapsto t$ et $g: t \mapsto e^t$, de sorte que :

$$I = \int_0^x f(t)g'(t) \, dt.$$

On applique alors la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= [f(t)g(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)g(t) \, dt \\ &= [te^t]_0^x - \int_0^x e^t \, dt \\ &= xe^x - [e^t]_0^x \\ &= xe^x - e^x + e^0 \\ &= (x-1)e^x + 1. \end{aligned}$$

Exemple 9.1.5. On souhaite déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. Soit pour cela x dans cet intervalle. On cherche à calculer

$$I = \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

L'astuce consiste à écrire :

$$I = \int_1^x 1 \cdot \ln(t) \, dt.$$

On pose alors $f: t \mapsto t$ et $g = \ln$, de sorte que

$$I = \int_1^x f'(t)g(t) \, dt.$$

On peut ainsi appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= [f(t)g(t)]_1^x - \int_1^x f(t)g'(t) \, dt \\ &= [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt \\ &= x \ln(x) - \int_1^x 1 \, dt \\ &= x \ln(x) - [t]_1^x \\ &= x \ln(x) - x + 1. \end{aligned}$$

9.2 Changement de variables

Théorème 9.2.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $u: J \rightarrow I$ une fonction dérivable de dérivée continue. Alors :

$$\forall (a, b) \in J^2, \quad \int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx.$$

Démonstration. Soit $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . En particulier, F est dérivable. Comme u est dérivable, on obtient alors que la fonction $F \circ u$ est dérivable avec :

$$\forall t \in J, \quad (F \circ u)'(t) = F'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t).$$

Autrement dit, $F \circ u$ est une primitive de $(f \circ u)u'$, donc, pour $(a, b) \in J^2$:

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) \, dt = \int_a^b (f \circ u)(t)u'(t) \, dt = [(F \circ u)(t)]_a^b = [F(u(t))]_a^b.$$

On peut réécrire ce dernier terme :

$$[F(u(t))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = [F(x)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) \, dx.$$

■

Exemple 9.2.2. On souhaite calculer

$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln(t)} \, dt.$$

On introduit le changement de variables $u: t \mapsto \ln(t)$. Alors :

$$u'(t) = \frac{1}{t},$$

et ainsi :

$$I = \int_e^{e^2} u'(t) \frac{1}{u(t)} \, dt = \int_e^{e^2} f(u(t)) u'(t) \, dt$$

avec $f: x \mapsto \frac{1}{x}$. On peut alors appliquer la formule de changement de variables :

$$I = \int_{u(e)}^{u(e^2)} f(x) \, dx = \int_{\ln(e)}^{\ln(e^2)} \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2).$$

Remarque 9.2.3. Une manière relativement courante de noter ce type de changement de variables consiste à introduire

$$x = u(t)$$

et de noter la dérivée par rapport à t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}(t) = u'(t).$$

On en déduit alors une expression du terme dt que l'on remplace dans l'intégrale. Quant aux bornes, il s'agit de calculer les valeurs (lorsque t vaut la borne du bas / du haut, que vaut x ?). Dans l'exemple précédent, on a :

$$x = \ln(t)$$

et

$$dx = \frac{1}{t} \, dt,$$

de sorte que

$$dt = t \, dx.$$

De plus, lorsque $t = e$, $x = \ln(e) = 1$ et, lorsque $t = e^2$, $x = \ln(e^2) = 2$. Ainsi :

$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int_1^2 \frac{1}{tx} t dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

Il faut bien noter qu'il s'agit là d'une manière d'écrire le changement de variables, pratique pour s'en souvenir, mais pas des plus rigoureuses.

Exemple 9.2.4. On souhaite calculer

$$I = \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose $x = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $x = \sqrt{1} = 1$ et, lorsque $t = 4$, $x = \sqrt{4} = 2$. De plus :

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt,$$

donc

$$dt = 2\sqrt{t} dx = 2x dx.$$

Ainsi :

$$I = \int_1^2 \frac{1-x}{x} 2x dx = \int_1^2 2(1-x) dx = [2x - x^2]_1^2 = -1.$$

Exemple 9.2.5. On souhaite calculer

$$I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1+t}}} dt.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est dérivable de dérivée continue sur $[0, 3]$. On peut donc poser $u = \sqrt{1+t}$. Alors :

$$du = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} dt,$$

d'où :

$$dt = 2\sqrt{1+t} du = 2u du.$$

De plus, lorsque $t = 0$, $u = \sqrt{1+0} = 1$ et, lorsque $t = 3$, $u = \sqrt{1+3} = 2$. On obtient :

$$I = \int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}} du.$$

La fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$ est dérivable de dérivée continue sur $[1, 2]$. On peut donc poser $v = \sqrt{1+u}$. Alors :

$$du = 2v dv.$$

Lorsque $u = 1$, $v = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et, lorsque $u = 2$, $v = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2(v^2-1)}{v} 2v \, dv = 4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (v^2-1) \, dv = 4 \left[\frac{v^3}{3} - v \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}^3}{3} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}^3}{3} + \sqrt{2} \right) = 4 \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Théorème 9.2.6. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $u: J \rightarrow I$ une fonction bijective et dérivable de dérivée continue. Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t) \, dt.$$

Démonstration. Soit $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors $F \circ u$ est dérivable et $(F \circ u)' = (f \circ u)u'$. Comme u est bijective, u^{-1} existe et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t) \, dt &= [F(u(t))]_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} = F(u(u^{-1}(b))) - F(u(u^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

■

Exemple 9.2.7. Soit $b \in]0, 1[$. On souhaite calculer

$$I = \int_0^b \arcsin(x) \, dx.$$

On pose $u: t \mapsto \sin(t)$. Sur $[0, \arcsin(b)]$, u est bijective, dérivable, et sa dérivée est continue. Ainsi :

$$I = \int_{u^{-1}(0)}^{u^{-1}(b)} \arcsin(u(t))u'(t) \, dt.$$

Or, $u^{-1} = \sin^{-1} = \arcsin$, donc :

$$I = \int_0^{\arcsin(b)} t \cos(t) \, dt.$$

On peut intégrer cela par parties :

$$\begin{aligned} I &= [t \sin(t)]_0^{\arcsin(b)} - \int_0^{\arcsin(b)} \sin(t) \, dt = b \arcsin(b) + [\cos(t)]_0^{\arcsin(b)} \\ &= b \arcsin(b) + \cos(\arcsin(b)) - 1. \end{aligned}$$

9.3 Application à quelques cas particuliers

Remarque 9.3.1. Par définition de l'intégrale :

$$\int_a^a f(x) \, dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

En effet, via la relation de Chasles :

$$0 = \int_a^a f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx.$$

Proposition 9.3.2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

2. Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Démonstration. Commençons par appliquer la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx.$$

On introduit le changement de variables $y = -x$ dans la première intégrale :

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_a^0 f(-y) \cdot (-1) \, dy = - \int_a^0 f(-y) \, dy = \int_0^a f(-y) \, dy.$$

On a donc obtenu :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) \, dx.$$

Si f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) + f(x)) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Si f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(x) - f(x)) \, dx = 0.$$

■

Proposition 9.3.3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique, pour un certain $T > 0$. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

Démonstration. Soit $(n, r) \in \mathbb{Z} \times [0, T[$ tel que :

$$a = nT + r.$$

Alors :

$$a + T = nT + r + T = (n + 1)T + r.,$$

donc :

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_{nT+r}^{(n+1)T+r} f(x) \, dx.$$

Comme $r \in [0, T[$, on trouve que $(n + 1)T \in [nT + r, (n + 1)T + r]$ et on peut appliquer la relation de Chasles :

$$\int_{nT+r}^{(n+1)T+r} f(x) \, dx = \int_{nT+r}^{(n+1)T} f(x) \, dx + \int_{(n+1)T}^{(n+1)T+r} f(x) \, dx.$$

Dans la première intégrale, on choisit le changement de variables $y := x - nT$ pour obtenir :

$$\int_{nT+r}^{(n+1)T} f(x) \, dx = \int_r^T f(y + nT) \, dy = \int_r^T f(y) \, dy$$

car f est T -périodique. Dans la seconde intégrale, on choisit $z := x - (n + 1)T$:

$$\int_{(n+1)T}^{(n+1)T+r} f(x) \, dx = \int_0^r f(z + (n + 1)T) \, dz = \int_0^r f(z) \, dz$$

toujours car f est T -périodique. On a donc trouvé :

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_r^T f(y) \, dy + \int_0^r f(z) \, dz = \int_0^r f(z) \, dz + \int_r^T f(y) \, dy = \int_0^T f(x) \, dx$$

par la relation de Chasles. ■

Chapitre 10

Primitivation de fractions rationnelles

10.1 Décomposition en éléments simples

L'objectif de ce chapitre est de savoir primitiver des fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec P et Q des fonctions polynomiales. Dans le cas où le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur, on peut ramener ce calcul à un autre à l'aide du résultat suivant.

Théorème 10.1.1. Soient $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynomiales avec $Q \neq 0$ et $\deg(Q) < \deg(P)$. On suppose que Q est unitaire et qu'il admet la décomposition

$$Q(x) = \prod_{i=1}^I (x - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^J (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^{m_i} \frac{\gamma_{i,m}}{(x - a_i)^m} + \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{n_j} \frac{\alpha_{j,n} x + \beta_{j,n}}{(x^2 + b_j x + c_j)^n}.$$

Exemple 10.1.2. On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

On peut montrer que :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

En multipliant cette relation par $(x-1)(x-2)$, on obtient :

$$x = a(x-2) + b(x-1).$$

Considérons alors $x = 1$:

$$1 = -a,$$

soit $a = -1$. Avec $x = 2$, on trouve :

$$2 = b.$$

Autrement dit :

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Exemple 10.1.3. On considère la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2+4x-2}.$$

On peut montrer que :

$$x^3-3x^2+4x-2 = (x-1)(x^2-2x+2)$$

et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2-2x+2 > 0.$$

Ainsi, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}.$$

On multiplie cette relation par $(x-1)(x^2-2x+2)$ pour obtenir :

$$x+1 = a(x^2-2x+2) + (bx+c)(x-1).$$

Considérons $x = 1$:

$$2 = a.$$

On ne peut pas considérer de réel x qui annule le polynôme en facteur devant a (puisque'il n'y en a pas). Commençons par en choisir un qui permet d'obtenir c . Avec $x = 0$, on trouve :

$$1 = 2a - c$$

soit $c = 3$. Il nous faut une dernière valeur de x . Prenons par exemple $x = -1$:

$$0 = 5a + 2b - 2c,$$

ce qui nous donne $b = -2$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{-2x+3}{x^2-2x+2}.$$

Une telle transformation est-elle encore possible lorsque l'hypothèse des degrés est levée ? En quelque sorte, oui, grâce à la division euclidienne qui suit.

Théorème 10.1.4. Soient $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynomiales avec $Q \neq 0$. Il existe un unique couple de fonctions polynomiales $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\deg(R) < \deg(Q)$ et :

$$P = SQ + R.$$

Exemple 10.1.5. Soient

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 7 \quad \text{et} \quad Q(x) = x^2 - 2x + 2.$$

On effectue la division euclidienne de P par Q . Pour annuler le terme de degré 3 de P , on doit multiplier Q par $2x$:

$$P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 - x^2 - x + 7 - 2x(x^2 - 2x + 2) = 3x^2 - 5x + 7.$$

Pour annuler le terme de degré 2 de ce dernier polynôme, on doit multiplier Q par 3 :

$$3x^2 - 5x + 7 - 3(x^2 - 2x + 2) = x + 1.$$

On « remonte » :

$$\begin{aligned} P(x) &= 2xQ(x) + 3x^2 - 5x + 7 \\ &= 2xQ(x) + 3Q(x) + x + 1 \\ &= (2x + 3)Q(x) + (x + 1) \\ &= S(x)Q(x) + R(x) \end{aligned}$$

avec $S(x) = 2x + 3$ et $R(x) = x + 1$.

Dans notre cas, on obtient :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Comme $\deg(R) < \deg(Q)$, on peut appliquer la décomposition précédente à la fraction

$\frac{R(x)}{Q(x)}$. Quant à S , il s'agit d'une fonction polynomiale que l'on sait déjà très bien primitiver.

Définition 10.1.6. On appelle élément simple de première espèce toute fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\gamma}{(x-a)^p}, \quad \text{avec } \gamma \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*.$$

On appelle élément simple de seconde espèce toute fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^p}, \quad \text{avec } (\alpha, \beta, b, c) \in \mathbb{R}^4, p \in \mathbb{N}^*.$$

10.2 Éléments de première espèce

Proposition 10.2.1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x-a)^p}.$$

Alors les primitives de f sont de la forme

$$\begin{cases} x \mapsto \ln(|x-a|) + C, & \text{si } p = 1, \\ x \mapsto \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x-a)^{p-1}} + C, & \text{si } p \geq 2, \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En posant $u: x \mapsto x-a$, on reconnaît que f est de la forme $u' u^{-p}$, d'où le résultat. ■

Corollaire 10.2.2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{a} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(ax+b)^p}.$$

Alors les primitives de f sont de la forme

$$\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{a} \ln(|ax+b|) + C, & \text{si } p = 1, \\ x \mapsto \frac{1}{a} \frac{1}{1-p} \frac{1}{(ax+b)^{p-1}} + C, & \text{si } p \geq 2, \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$:

$$f(x) = \frac{1}{(ax+b)^p} = \frac{1}{(a(x+\frac{b}{a}))^p} = \frac{1}{a^p} \frac{1}{(x+\frac{b}{a})^p}.$$

On peut alors appliquer le résultat précédent pour conclure. On peut noter que le cas $p = 1$ peut être traité de manière plus simple. ■

10.3 Éléments de seconde espèce

10.3.1 Un premier cas

Proposition 10.3.1. Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + bx + c > 0.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^p}. \end{aligned}$$

Alors les primitives de f sont de la forme

$$\begin{cases} x \mapsto \ln(x^2 + bx + c) + C, & \text{si } p = 1, \\ x \mapsto \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{p-1}} + C, & \text{si } p \geq 2, \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En posant $u: x \mapsto x^2 + bx + c$, on note que f est de la forme $u'u^{-p}$, d'où le résultat. ■

Tous les éléments simples de seconde espèce ne sont pas de cette forme qui peut sembler très spécifique. Elle ne l'est en réalité pas tant que ça. Considérons la forme générale

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^p}$$

avec $\alpha \neq 0$. On tente de retrouver la forme précédente :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^p} &= \frac{\alpha}{2} \frac{2x + \frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2 + bx + c)^p} = \frac{\alpha}{2} \frac{2x + b - b + \frac{2\beta}{\alpha}}{(x^2 + bx + c)^p} \\ &= \frac{\alpha}{2} \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^p} + \frac{\alpha}{2} \frac{\frac{2\beta}{\alpha} - b}{(x^2 + bx + c)^p}. \end{aligned}$$

On peut primitiver la première partie avec le résultat précédent. Il reste alors à déterminer les primitives des éléments de la forme

$$\frac{1}{(x^2 + bx + c)^p}.$$

10.3.2 Forme canonique et cas général

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$. Commençons par une réécriture qui vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

En notant $\Delta := b^2 - 4ac$, on a ainsi obtenu :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

On appelle Δ le discriminant de la fonction polynomiale $x \mapsto ax^2 + bx + c$: son signe permet de distinguer plusieurs cas. Par exemple, si $\Delta < 0$, la forme canonique permet de voir facilement que cette fonction est de signe constant (celui de a), et qu'elle ne s'annule jamais.

Discriminant nul

On commence par s'intéresser au cas $\Delta = 0$. Autrement dit :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Ainsi :

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} dx$$

et on reconnaît alors un élément simple de première espèce que l'on sait primitiver.

Proposition 10.3.2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^p}.$$

Alors les primitives de f sont de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{1-2p} \frac{x + \frac{b}{2a}}{(ax^2 + bx + c)^p} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Le calcul précédent nous donne :

$$f(x) = \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^p} = \frac{1}{\left(a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right)^p} = \frac{1}{a^p} \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2p}}.$$

Comme $p \geq 1$, $2p \geq 2$ et on peut appliquer la primitivation des éléments simples de première espèce pour obtenir les primitives :

$$x \mapsto \frac{1}{a^p} \frac{1}{1-2p} \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2p-1}} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. On obtient le résultat annoncé en remaniant légèrement cette expression :

$$\frac{1}{a^p} \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2p-1}} = \frac{1}{a^p} \frac{x + \frac{b}{2a}}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2p}} = \frac{x + \frac{b}{2a}}{\left(a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right)^p}.$$

■

Discriminant strictement positif

Continuons avec le cas $\Delta > 0$. Dans ce cas, $\sqrt{\Delta}$ existe et on peut continuer notre factorisation :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= \frac{\Delta}{4a} \left(\frac{4a^2}{\Delta} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - 1 \right) \\ &= \frac{\Delta}{4a} \left(\left(\frac{2a}{\sqrt{\Delta}} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right)^2 - 1 \right) \\ &= \frac{\Delta}{4a} \left(\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 = 1 \\ &\iff \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} = 1 \\ &\iff x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

En posant

$$x_- := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_+ := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

on obtient :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+),$$

donc on peut factoriser notre polynôme. Pour la primitivation, une idée est alors de simplement continuer la décomposition en éléments simples : on se retrouvera avec des éléments de première espèce, que l'on sait primitiver.

Discriminant strictement négatif

Terminons avec le cas $\Delta < 0$. Dans ce cas, on ne peut pas passer directement à la racine, mais on peut toujours commencer par écrire :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= \frac{-\Delta}{4a} \left(\frac{4a^2}{-\Delta} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et ainsi $\sqrt{-\Delta}$ existe. On trouve :

$$ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a} \left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1 \right).$$

Alors :

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4a} \left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1 \right)} dx = -\frac{4a}{\Delta} \int \frac{1}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1} dx.$$

On considère le changement de variable

$$y := \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad \text{soit } dy = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}},$$

d'où :

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = -\frac{4a}{\Delta} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy.$$

Lemme 10.3.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{1}{(y^2 + 1)^p}.$$

et une primitive F_p de f_p . Alors

$$F_1(y) = \arctan(y) + C_1$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $p \geq 2$:

$$F_p(y) = \left(1 - \frac{1}{2(p-1)} \right) F_{p-1}(y) + \frac{1}{2(p-1)} y f_{p-1}(y) + C_p$$

avec $C_p \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Le cas $p = 1$ correspond à

$$f_1(y) = \frac{1}{y^2 + 1}$$

où l'on reconnaît la dérivée de $\arctan$. Pour $p \geq 2$, on commence par écrire :

$$f_p(y) = \frac{1}{(y^2 + 1)^p} = \frac{1 + y^2 - y^2}{(y^2 + 1)^p} = f_{p-1}(y) - y \frac{y}{(y^2 + 1)^p}.$$

On note

$$g_p: y \mapsto \frac{y}{(y^2 + 1)^p}$$

dont les primitives sont de la forme

$$-\frac{1}{2(p-1)}f_{p-1}(y) + C.$$

On introduit alors

$$h_p: y \mapsto -\frac{1}{2(p-1)}yf_{p-1}(y)$$

dont la dérivée est donnée par :

$$h'_p(y) = -\frac{1}{2(p-1)}f_{p-1}(y) + yg_p(y).$$

Ainsi :

$$f_p(y) = f_{p-1}(y) - yg_p(y) = \left(1 + \frac{1}{2(p-1)}\right) f_{p-1}(y) + h'_p(y)$$

et le résultat suit de la définition de h_p . ■

Proposition 10.3.4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction

$$g_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^p}.$$

Alors les primitives de g_p sont de la forme

$$x \mapsto \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} F_p\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C_p$$

avec $C_p \in \mathbb{R}$, où F_p est définie dans le [Lemme 10.3.3](#).

Démonstration. On utilise notre calcul précédent :

$$g_p(x) = \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^p} = \frac{1}{\left(-\frac{\Delta}{4a} \left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right)\right)^p} = \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{1}{\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right)^p}.$$

On introduit :

$$u: x \mapsto \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

dont on peut calculer la dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 g_p(x) &= \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{1}{(u(x)^2 + 1)^p} = \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \frac{u'(x)}{(u(x)^2 + 1)^p} \\
 &= \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} u'(x) f_p(u(x)) = \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} u'(x) F_p'(u(x)) \\
 &= \left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^p \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} (F_p \circ u)'(x),
 \end{aligned}$$

et on conclut avec le [Lemme 10.3.3](#). ■

10.4 Exemple récapitulatif

On considère

$$P: x \mapsto 2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 25x \quad \text{et} \quad Q: x \mapsto x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

et on souhaite calculer

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

où

$$f: x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On commence par la division euclidienne de P par Q , puis on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x + 1 + \frac{5x^3 - 17x^2 + 21x - 4}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \\
 &= 2x + 1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} + \frac{4x - 1}{x^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 3 + \ln(2) - \frac{\pi}{4}.$$

Chapitre 11

Une introduction aux nombres complexes

11.1 Construction

Définition 11.1.1. Soit $\mathcal{C} := (\mathbb{R}^2, +, \times, \cdot)$ le plan muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$, et d'une loi de composition externe $\cdot$ définies par :

- $\forall ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathcal{C}^2, \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2);$
- $\forall ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathcal{C}^2, \quad (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2);$
- $\forall (a, b) \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b).$

Proposition 11.1.2. Les lois de composition vérifient les propriétés suivantes.

1. Elles sont associatives :
 - (a) $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{C}^3, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$
 - (b) $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{C}^3, (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3);$
 - (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathcal{C}, \lambda \cdot (\mu \cdot z) = (\lambda \mu) \cdot z.$
2. Les lois internes sont commutatives :
 - (a) $\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{C}^2, z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$
 - (b) $\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{C}^2, z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1.$
3. Les multiplications sont distributives :
 - (a) $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{C}^3, z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3;$
 - (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (z_1, z_2) \in \mathcal{C}^2, \lambda \cdot (z_1 + z_2) = \lambda \cdot z_1 + \lambda \cdot z_2;$
 - (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathcal{C}, (\lambda + \mu) \cdot z = \lambda \cdot z + \mu \cdot z.$

Démonstration. Toutes ces propriétés découlent du fait qu'elles sont vraies dans l'ensemble des nombres réels.

1. (a)

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) \\
&= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\
&= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) \\
&= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) \\
&= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\
&= (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(z_1 \times z_2) \times z_3 &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \times (a_3, b_3) \\
&= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3, \\
&\quad (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3) \\
&= ((a_1a_2)a_3 - (b_1b_2)a_3 - (a_1b_2)b_3 - (b_1a_2)b_3, \\
&\quad (a_1a_2)b_3 - (b_1b_2)b_3 + (a_1b_2)a_3 + (b_1a_2)a_3) \\
&= (a_1(a_2a_3) - b_1(b_2a_3) - a_1(b_2b_3) - b_1(a_2b_3), \\
&\quad a_1(a_2b_3) - b_1(b_2b_3) + a_1(b_2a_3) + b_1(a_2a_3)) \\
&= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(b_2a_3 + a_2b_3), \\
&\quad a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)) \\
&= (a_1, b_1) \times (a_2a_3 - b_2b_3, b_2a_3 + a_2b_3) \\
&= z_1 \times (z_2 \times z_3)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\mu \cdot z) &= \lambda \cdot (\mu \cdot (a, b)) \\
&= \lambda \cdot (\mu a, \mu b) \\
&= (\lambda(\mu a), \lambda(\mu b)) \\
&= ((\lambda\mu)a, (\lambda\mu)b) \\
&= (\lambda\mu) \cdot (a, b) \\
&= (\lambda\mu) \cdot z
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \\
&= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
&= (a_2 + a_1, b_2 + b_1) \\
&= (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \\
&= z_2 + z_1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
z_1 \times z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \\
&= (a_2 a_1 - b_2 b_1, a_2 b_1 + b_2 a_1) \\
&= z_2 \times z_1
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
z_1 \times (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) \times (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\
&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) \\
&= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) \\
&= z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (z_1 + z_2) &= \lambda \cdot (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\
&= (\lambda(a_1 + a_2), \lambda(b_1 + b_2)) \\
&= (\lambda a_1 + \lambda a_2, \lambda b_1 + \lambda b_2) \\
&= (\lambda a_1, \lambda b_1) + (\lambda a_2, \lambda b_2) \\
&= \lambda \cdot (a_1, b_1) + \lambda \cdot (a_2, b_2) \\
&= \lambda \cdot z_1 + \lambda \cdot z_2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot z &= (\lambda + \mu) \cdot (a, b) \\
&= ((\lambda + \mu)a, (\lambda + \mu)b) \\
&= (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b) \\
&= (\lambda a, \lambda b) + (\mu a, \mu b) \\
&= \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b) \\
&= \lambda \cdot z + \mu \cdot z
\end{aligned}$$

■

Proposition 11.1.3. L'élément $0_{\mathcal{C}} := (0, 0) \in \mathcal{C}$ est neutre pour l'addition :

$$\forall z \in \mathcal{C}, \quad 0_{\mathcal{C}} + z = z.$$

De plus, tout élément $(a, b) \in \mathcal{C}$ admet un opposé donné par $(-a, -b)$:

$$(a, b) + (-a, -b) = 0_{\mathcal{C}}.$$

Démonstration. Soit $z = (a, b) \in \mathcal{C}$. Alors :

$$0_{\mathcal{C}} + z = (0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b) = z.$$

De plus :

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0_{\mathcal{C}}.$$

■

Remarque 11.1.4. On peut également montrer que cet opposé est unique. En effet, soient $z_1 \in \mathcal{C}$ et $z_2 \in \mathcal{C}$ deux opposés de z :

$$z + z_1 = z + z_2 = 0_{\mathcal{C}}.$$

Alors :

$$z_1 = z_1 + 0_{\mathcal{C}} = z_1 + (z + z_2) = (z_1 + z) + z_2 = 0_{\mathcal{C}} + z_2 = z_2.$$

Par ailleurs, on remarque que l'opposé est donné par :

$$(-a, -b) = (-1) \cdot (a, b).$$

Naturellement, on le note alors $-z$.

Proposition 11.1.5. L'élément $1_{\mathcal{C}} := (1, 0) \in \mathcal{C}$ est neutre pour la multiplication :

$$\forall z \in \mathcal{C}, \quad 1_{\mathcal{C}} \times z = z.$$

De plus, tout élément $z = (a, b) \in \mathcal{C}$ tel que $z \neq 0_{\mathcal{C}}$ admet un inverse donné par

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

c'est-à-dire :

$$z \times z^{-1} = 1_{\mathcal{C}}.$$

Démonstration. Soit $z = (a, b) \in \mathcal{C}$. Alors :

$$1_{\mathcal{C}} \times z = (1, 0) \times (a, b) = (1a - 0b, 1b + 0a) = (a, b) = z.$$

Supposons que $z \neq 0_{\mathcal{C}}$. En particulier, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et ainsi $a^2 + b^2 > 0$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} (a, b) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(a \frac{a}{a^2 + b^2} - b \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

■

On peut noter la décomposition suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}, \quad (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1).$$

Définition 11.1.6. On note $i := (0, 1)$. Cet élément est appelé unité imaginaire.

Avec cette notation, on réécrit la décomposition précédente :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}, \quad (a, b) = a \cdot 1_{\mathcal{C}} + b \cdot i.$$

On définit maintenant la fonction

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C} \\ a &\mapsto (a, 0). \end{aligned}$$

Proposition 11.1.7. La fonction Φ est injective.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(a) = \Phi(b)$, c'est-à-dire $(a, 0) = (b, 0)$, donc $a = b$. ■

On note

$$\mathcal{R} := \Phi(\mathbb{R}) = \{(a, 0) ; a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}.$$

Comme Φ est injective, on en déduit directement que

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{R} \\ a &\mapsto \Phi(a) = (a, 0) \end{aligned}$$

est bijective. De plus :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad \text{et} \quad \phi(ab) = \phi(a) \times \phi(b).$$

On identifie alors naturellement les éléments de $\mathcal{R}$ à des réels. Par abus de notation, on ne fait alors plus la distinction entre un réel $a \in \mathbb{R}$ et son représentant $(a, 0) \in \mathcal{R}$. On peut alors encore simplifier notre décomposition :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}, \quad (a, b) = a + b \cdot i.$$

Cette décomposition est « compatible » avec l'addition et la multiplication par un réel, dans le sens :

$$\forall ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathcal{C}^2, \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i,$$

et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a) + (\lambda b) \cdot i.$$

Il nous reste une dernière remarque à faire :

$$i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = \phi(-1).$$

Autrement dit, le carré de l'unité imaginaire peut être identifié au réel -1 . On obtient alors la dernière compatibilité, celle avec la multiplication que l'on peut maintenant voir comme une opération un peu plus « habituelle » :

$$\begin{aligned} \forall ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathcal{C}^2, \quad (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_2 b_2 \cdot i + b_1 a_2 \cdot i + b_1 b_2 \cdot (i \times i) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_2 b_2 + b_1 a_2) \cdot i. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de maintenant, on considère la définition suivante.

Définition 11.1.8. On appelle unité imaginaire le nombre $i \notin \mathbb{R}$ tel que $i^2 = -1$. On appelle nombre complexe tout nombre s'écrivant sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathcal{Re}(z)$. Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathcal{Im}(z)$. L'écriture ci-dessus est appelée forme algébrique du complexe z .

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} := \{a + ib ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le résultat suivant découle de la construction qui a été faite jusque-là.

Proposition 11.1.9. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$z_1 = z_2 \iff (\mathcal{Re}(z_1) = \mathcal{Re}(z_2) \text{ et } \mathcal{Im}(z_1) = \mathcal{Im}(z_2)).$$

Exemple 11.1.10. Soient

$$z_1 := 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 := 2 - i.$$

Alors $\mathcal{Re}(z_1) = 1$, $\mathcal{Im}(z_1) = 2$, $\mathcal{Re}(z_2) = 2$ et $\mathcal{Im}(z_2) = -1$. Soit $z := z_1 z_2$. Alors :

$$\begin{aligned} z &= (1 + 2i)(2 - i) \\ &= 2 - i + 4i - 2i^2 \\ &= 2 + 3i + 2 \\ &= 4 + 3i, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{Re}(z) = 4$ et $\mathcal{Im}(z) = 3$.

Exemple 11.1.11. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Alors :

$$iz = i(a + ib) = ai + bi^2 = -b + ai,$$

donc $\operatorname{Re}(iz) = -b$ et $\operatorname{Im}(iz) = a$.

11.2 Conjugaison

Définition 11.2.1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z le complexe $\bar{z} := a - ib$.

Exemple 11.2.2. Quelques exemples :

$$\overline{1 + 2i} = 1 - 2i,$$

$$\overline{3 - i} = 3 + i,$$

$$\overline{1} = 1,$$

$$\overline{3i} = -3i,$$

$$\overline{1 - 2i} = 1 + 2i.$$

Proposition 11.2.3. Soit $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$. Alors :

1. $\bar{\bar{z}} = z$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
4. si $z \neq 0$, alors $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;
5. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
6. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Démonstration. On note $z = a + ib$, $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

1. Comme $z = a + ib$, $\bar{z} = a + i(-b)$ et $\bar{\bar{z}} = a + i(-(-b)) = a + ib = z$.
2. On part de la définition :

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

3. Toujours la définition :

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 z_2} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\
 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - b_1 a_2) \\
 &= (a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)) + i(a_1(-b_2) + (-b_1)a_2) \\
 &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) \\
 &= \bar{z}_1 \bar{z}_2.
 \end{aligned}$$

4. Par définition :

$$zz^{-1} = 1,$$

donc :

$$1 = \bar{1} = \overline{zz^{-1}} = \bar{z}\bar{z}^{-1}.$$

5. Comme $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$, donc :

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z).$$

6. On peut raisonner par équivalences à l'aide du point précédent :

$$\begin{aligned}
 z \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\
 &\iff 2i\operatorname{Im}(z) = 0 \\
 &\iff z - \bar{z} = 0 \\
 &\iff z = \bar{z}.
 \end{aligned}$$

■

11.3 Correspondance dans le plan

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout complexe $z = a + ib$, on fait correspondre le point, ou le vecteur selon les cas, de coordonnées (a, b) . Réciproquement, à tout point ou vecteur de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on fait correspondre le complexe $z = a + ib$. Ce complexe est alors appelé affixe du point (ou du vecteur).

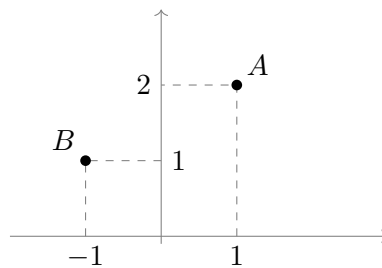


FIGURE 11.1 – Points dans le plan d'affixes $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = -1 + i$.

Remarque 11.3.1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $M \in \mathbb{R}^2$ le point d'afixe z . On vérifie facilement que le point d'afixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à la droite dirigée par $\vec{u}$ et passant par O . De même, le point d'afixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à l'origine O .

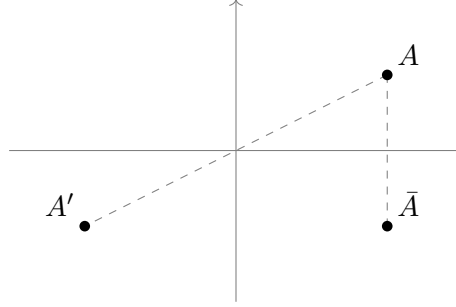


FIGURE 11.2 – Placement dans le plan du point A d'afixe $z_A = 2 + i$, $\bar{A}$ d'afixe $\bar{z}_A$ et A' d'afixe $-z_A$.

Proposition 11.3.2. Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . Alors :

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A.$$

De plus, le milieu du segment $[AB]$ admet pour affixe :

$$\frac{z_A + z_B}{2}.$$

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{w}'}$. Alors :

$$z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$z_{\lambda\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}.$$

Démonstration. On pose $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, de sorte que $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Alors $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, donc :

$$z_{\vec{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = z_B - z_A.$$

Soit M le milieu du segment $[AB]$. Alors :

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right),$$

donc :

$$z_M = \frac{x_A + x_B}{2} + i \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}((x_A + x_B) + i(y_A + y_B)) = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

On pose $\vec{w} = (a, b)$ et $\vec{w}' = (a', b')$. Alors $z_{\vec{w}} = a + ib$, $z_{\vec{w}'} = a' + ib'$, $\vec{w} + \vec{w}' = (a + a', b + b')$ et :

$$z_{\vec{w} + \vec{w}'} = (a + a') + i(b + b') = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}.$$

Enfin, $\lambda \vec{w} = (\lambda a, \lambda b)$, donc :

$$z_{\lambda \vec{w}} = (\lambda a) + i(\lambda b) = \lambda(a + ib) = \lambda z_{\vec{w}}.$$

■

11.4 Module

Définition 11.4.1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle module de z la quantité

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple 11.4.2. Quelques exemples :

$$\begin{aligned} |1 + i| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ |3 - 2i| &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}, \\ |-5| &= \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5, \\ |2i| &= \sqrt{0^2 + 2^2} = 2. \end{aligned}$$

Remarque 11.4.3. Géométriquement, le module d'un complexe est la norme (euclidienne) du vecteur associé :

$$|z_{\vec{w}}| = \|\vec{w}\|.$$

En particulier, la distance entre deux points A et B est donnée par $|z_A - z_B|$.

Proposition 11.4.4. Soit $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$. Le module vérifie les propriétés suivantes :

1. $|z| = 0 \iff z = 0$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
3. $|\bar{z}| = |z|$;
4. $|z|^2 = z \bar{z}$;
5. si $z \neq 0$, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$;

- | |
|--|
| 6. si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$;
7. $\operatorname{Re}(z) \leq z $ et $\operatorname{Im}(z) \leq z $. |
|--|

Démonstration. On note $z = a + ib$, $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

1. On peut procéder directement par équivalences :

$$|z| = 0 \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0 \iff z = 0.$$

2. Comme

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

on a :

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à la racine.

3. On fait le calcul directement :

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

4. Là aussi, on calcule le produit directement :

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(-ab + ba) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

5. On part de la définition de l'inverse :

$$z z^{-1} = 1.$$

Ainsi :

$$1 = |1| = |z z^{-1}| = |z| |z^{-1}|,$$

d'où :

$$|z|^{-1} = |z^{-1}|.$$

6. On part de :

$$|z|^2 = z \bar{z}.$$

On en déduit :

$$z^{-1} |z|^2 = z^{-1} z \bar{z} = \bar{z},$$

d'où le résultat.

7. Comme :

$$|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2,$$

on a d'une part :

$$\operatorname{Re}(z)^2 \leq \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2,$$

d'où :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|,$$

et on obtient l'inégalité souhaitée en utilisant $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|$. On procède de la même manière pour la partie imaginaire. ■

Exemple 11.4.5. La relation $z\bar{z} = |z|^2$ peut s'avérer très utile en pratique pour obtenir la forme algébrique d'un complexe. Par exemple, le complexe

$$z = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{où } z_1 = 1 + i \text{ et } z_2 = 2 + 3i$$

n'est pas sous forme algébrique. Cependant, en écrivant :

$$z = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

on obtient un réel au dénominateur. Il ne reste alors plus qu'à simplifier le numérateur et on obtiendra la forme algébrique :

$$z = \frac{1 + i}{2 + 3i} = \frac{(1 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i + 2i + 3}{4 + 9} = \frac{5 - i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i.$$

Proposition 11.4.6. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Le module vérifie l'inégalité triangulaire :

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Démonstration. Commençons par écrire :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Or :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|.$$

Ainsi :

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

En appliquant la racine carrée, on trouve :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Pour la partie gauche de l'inégalité, commençons par appliquer la partie de droite :

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

d'où :

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

■

Remarque 11.4.7. Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si l'un des deux complexes est nul ou s'ils sont proportionnels via un réel positif.

Dans un sens, supposons $z_1 = 0$. Alors :

$$|z_1 + z_2| = |0 + z_2| = |z_2| = 0 + |z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Sinon, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Alors :

$$|z_1 + z_2| = |z_1 + \lambda z_1| = |(1 + \lambda)z_1| = |1 + \lambda||z_1|.$$

Or, $\lambda \geq 0$ donc :

$$|z_1 + z_2| = (1 + \lambda)|z_1| = |z_1| + \lambda|z_1| = |z_1| + |\lambda z_1| = |z_1| + |z_2|.$$

Réciproquement, supposons que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Alors $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$. Ainsi :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)^2 = |z_1 \bar{z}_2|^2 = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)^2 + \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)^2,$$

donc $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$. Soit alors $\tilde{\lambda} := \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. Par ce qui précède, on sait que :

$$z_1 \bar{z}_2 = \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+.$$

Si $z_1 = 0$, le résultat est démontré. Sinon, z_1 est inversible et :

$$\bar{z}_2 = z_1^{-1} \tilde{\lambda} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} \tilde{\lambda} = \lambda \bar{z}_1,$$

avec $\lambda := \frac{\tilde{\lambda}}{|z_1|^2} \in \mathbb{R}^+$.

Chapitre 12

Forme exponentielle des nombres complexes

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'ensemble des nombres complexes via leur forme algébrique :

$$a + ib \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette écriture est pratique dès qu'il s'agit de « lire » les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, mais il existe d'autres formes permettant de simplifier certains calculs.

12.1 Argument

On note

$$\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$$

l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition 12.1.1. L'ensemble $\mathcal{U}$ est stable par produit, inverse et quotient :

1. $\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{U}^2, \quad z_1 z_2 \in \mathcal{U} ;$
2. $\forall z \in \mathcal{U}, \quad z \neq 0 \text{ et } z^{-1} \in \mathcal{U} ;$
3. $\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{U}^2, \quad \frac{z_1}{z_2} \in \mathcal{U}.$

Démonstration. 1. Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{U}^2$. Par définition, $|z_1| = |z_2| = 1$. Ainsi :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1,$$

donc $z_1 z_2 \in \mathcal{U}$.

2. Soit $z \in \mathcal{U}$. Comme $|z| = 1$, en particulier, $z \neq 0$ et ainsi z est inversible. De plus :

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1,$$

donc $z^{-1} \in \mathcal{U}$.

3. Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{U}^2$. Alors :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1,$$

donc $\frac{z_1}{z_2} \in \mathcal{U}$. ■

Pour tout $z = a + ib \in \mathcal{U}$, on a par définition :

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Le point d'affixe z est donc situé sur le cercle unité. De par la construction des fonctions cosinus et sinus qui a été faite, on en déduit alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = \sin(\theta).$$

Plus généralement, considérons $z \in \mathbb{C}^*$. On définit

$$\tilde{z} := \frac{z}{|z|}.$$

Alors $|\tilde{z}| = 1$, donc $\tilde{z} \in \mathcal{U}$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\tilde{z} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

On obtient alors :

$$z = |z|\tilde{z} = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Définition 12.1.2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

est appelé argument de z et est noté $\arg(z)$. L'écriture ci-dessus est appelée forme trigonométrique du complexe z .

Exemple 12.1.3. On recherche la forme trigonométrique du complexe

$$z := 1 + i.$$

Commençons par calculer :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{2}.$$

On factorise alors par $|z|$:

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

On cherche donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On reconnaît $\theta = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i \right).$$

Proposition 12.1.4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a). \end{aligned}$$

Démonstration. On note

$$A := (\cos(a), \sin(a)) \quad \text{et} \quad B := (\cos(b), \sin(b)).$$

Soit :

$$C := (\cos(a - b), \sin(a - b)).$$

En notant $I := (1, 0)$, on remarque que le triangle OIC est la rotation du triangle OBA d'angle $-b$. Ainsi, $AB = IC$. D'une part :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (\cos(b) - \cos(a))^2 + (\sin(b) - \sin(a))^2 \\ &= \cos^2(b) - 2\cos(b)\cos(a) + \cos^2(a) + \sin^2(b) - 2\sin(b)\sin(a) + \sin^2(a) \\ &= \underbrace{\cos^2(b) + \sin^2(b)}_{=1} + \underbrace{\cos^2(a) + \sin^2(a)}_{=1} - 2\cos(b)\cos(a) - 2\sin(b)\sin(a) \\ &= 2 - 2(\cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$IC^2 = (x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2 = (x_C - 1)^2 + y_C^2 = x_C^2 - 2x_C + 1 + y_C^2.$$

Or, C appartient au cercle unité, donc :

$$x_C^2 + y_C^2 = 1,$$

et ainsi :

$$IC^2 = 2 - 2x_C.$$

On revient alors à l'égalité $AB = IC$, élevée au carré, et on utilise la définition de x_C pour obtenir :

$$\cos(a - b) = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a).$$

En utilisant cette relation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \cos\left(a - b - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(a - \left(b + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(a) \cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a) \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

On réutilise la relation précédente :

$$\sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(b + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(b).$$

De plus :

$$\cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(b - \frac{-\pi}{2}\right) = \cos(b) \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \sin(b) \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\sin(b),$$

d'où :

$$\sin(a - b) = -\cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b).$$

■

■ **Proposition 12.1.5.** La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0) \cos(x) + \sin(0) \sin(x) = \cos(x),$$

ainsi que :

$$\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin(0) \cos(x) - \sin(x) \cos(0) = -\sin(x).$$

■

■ **Proposition 12.1.6.** Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a). \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise les relations précédemment montrées et les parités obtenues. D'une part :

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

D'autre part :

$$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

■

Corollaire 12.1.7. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi).$$

Comme $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$, on en déduit :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x),$$

donc $\cos$ est 2π -périodique. Par ailleurs :

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) - \sin(2\pi)\cos(x),$$

et on en déduit de même la 2π -périodicité de $\sin$.

■

Définition 12.1.8. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Ce réel est appelé argument principal de z et est noté $\text{Arg}(z)$.

Lemme 12.1.9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\cos(a) = \cos(b) \quad \text{et} \quad \sin(a) = \sin(b).$$

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$b = a + 2k\pi.$$

Démonstration. On pose $c := b - a$. Alors :

$$\cos(c) = \cos(b-a) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a).$$

Comme $\cos(b) = \cos(a)$ et $\sin(b) = \sin(a)$, on obtient :

$$\cos(c) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1.$$

Par ailleurs :

$$\sin(c) = \sin(b - a) = \sin(b) \cos(a) - \sin(a) \cos(b) = \sin(a) \cos(a) - \sin(a) \cos(a) = 0.$$

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$c = 2k\pi,$$

d'où le résultat en revenant à la définition de c . ■

Proposition 12.1.10. Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$. Alors :

1. $\exists k \in \mathbb{Z} / \operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') + 2k\pi$;
2. $\exists k \in \mathbb{Z} / \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$;
3. $\exists k \in \mathbb{Z} / \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') + 2k\pi$;
4. $\exists k \in \mathbb{Z} / \operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$.

Démonstration. On note $\theta := \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ et $\theta' := \operatorname{Arg}(z') \in [0, 2\pi[$. On peut alors écrire :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad z' = |z'|(\cos(\theta') + i \sin(\theta')).$$

1. D'une part :

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))|z'|(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i(\sin(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta') \cos(\theta))) \\ &= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')). \end{aligned}$$

On obtient alors la forme trigonométrique de zz' . Notons $\alpha := \operatorname{Arg}(zz') \in [0, 2\pi[$. Alors :

$$zz' = |zz'|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)).$$

On identifie les parties réelles et imaginaires :

$$\cos(\alpha) = \cos(\theta + \theta') \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \sin(\theta + \theta').$$

On obtient alors le résultat en invoquant le [Lemme 12.1.9](#).

2. On peut appliquer le premier point, qui vient d'être démontré. Comme :

$$1 = z \frac{1}{z},$$

on obtient qu'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arg}(1) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) + 2\ell\pi.$$

Or, $\operatorname{Arg}(1) = 0$, donc on trouve :

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z) - 2\ell\pi,$$

d'où le résultat en posant $k := -\ell$.

3. On applique les deux points précédents. Comme :

$$\frac{z}{z'} = z \frac{1}{z'},$$

on obtient qu'il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z'} \right) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left(\frac{1}{z'} \right) + 2k_1\pi$$

par application du premier point. On applique le second point pour obtenir l'existence d'un certain $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z'} \right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}(z') + 2k_2\pi + 2k_1\pi,$$

d'où le résultat en posant $k := k_1 + k_2$.

4. On peut encore une fois appliquer le premier point. D'une part :

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

D'autre part, $|z|^2 \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Arg}(|z|^2) = 0$, d'où le résultat en mimant la même preuve que pour le second point. ■

Géométriquement, on peut considérer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$. L'angle (orienté) formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à $\operatorname{Arg} \left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \right)$.

12.2 Formule de Moivre

Proposition 12.2.1. Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a d'une part :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^0 = 1,$$

et d'autre part :

$$\cos(0 \cdot \theta) + i \sin(0 \cdot \theta) = 1 + i \cdot 0 = 1,$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$. Supposons qu'elle le soit à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \\ &= \cos(\theta) \cos(n\theta) - \sin(\theta) \sin(n\theta) + i(\sin(\theta) \cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)) \\ &= \cos(\theta + n\theta) + i \sin(\theta + n\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta), \end{aligned}$$

donc l'égalité reste vraie au rang $n+1$, ce qui termine la preuve. ■

On déduit en particulier :

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n).$$

Définition 12.2.2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Remarque 12.2.3. Il s'agit d'une définition plutôt naturelle une fois que l'on a la formule de Moivre. En effet, cette formule nous donne :

$$(e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

D'autre part, on souhaiterait profiter des propriétés de l'exponentielle et, en particulier, on aimerait pouvoir écrire

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

ce qui est bien une égalité avec la définition donnée et la formule de Moivre.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on rappelle qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

On obtient alors la définition suivante.

Définition 12.2.4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z .

Proposition 12.2.5. Soient $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $z' = r'e^{i\theta'} \in \mathbb{C}^*$. Alors :

1. $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z^n = r^n e^{in\theta}$;
3. $\bar{z} = re^{-i\theta}$;
4. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$;
5. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Démonstration. 1. Appliquons la définition :

$$\begin{aligned}
 zz' &= re^{i\theta} r' e^{i\theta'} \\
 &= rr' (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\
 &= rr' (\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i (\sin(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta') \cos(\theta))) \\
 &= rr' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \\
 &= rr' e^{i(\theta + \theta')}.
 \end{aligned}$$

2. On applique la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}
 z^n &= \left(re^{i\theta} \right)^n \\
 &= r^n (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\
 &= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \\
 &= r^n e^{in\theta}.
 \end{aligned}$$

3. On applique la définition et les propriétés de la conjugaison. Comme :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

on trouve :

$$\bar{z} = \overline{r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = r(\cos(\theta) - i \sin(\theta)).$$

Par parité des fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = re^{-i\theta}.$$

4. Rappelons :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{re^{-i\theta}}{r^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta},$$

en utilisant le troisième point.

5. On applique le premier et le quatrième points :

$$\frac{z}{z'} = z \frac{1}{z'} = re^{i\theta} \frac{1}{r'} e^{i\theta'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta + \theta')}.$$

■

On peut également montrer que la forme exponentielle d'un nombre complexe est unique (modulo 2π pour l'argument).

Proposition 12.2.6. Soient $(r, \rho) \in (\mathbb{R}_*)^2$ et $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$re^{ia} = \rho e^{i\alpha} \iff (r = \rho \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} / \alpha = a + 2k\pi).$$

Démonstration. D'une part, supposons que $r = \rho$ et qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = a + 2k\pi$. Alors :

$$\rho e^{i\alpha} = r e^{i(a+2k\pi)} = r e^{ia} e^{2ik\pi} = r e^{ia}$$

car $e^{2ik\pi} = 1$.

Réciproquement, supposons $r e^{ia} = \rho e^{i\alpha}$. Par définition :

$$r(\cos(a) + i \sin(a)) = \rho(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)),$$

que l'on peut réécrire :

$$r \cos(a) + i r \sin(a) = \rho \cos(\alpha) + i \rho \sin(\alpha).$$

On identifie alors les parties réelles et imaginaires :

$$r \cos(a) = \rho \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad r \sin(a) = \rho \sin(\alpha).$$

Ceci implique :

$$r^2 \cos^2(a) = \rho^2 \cos^2(\alpha) \quad \text{et} \quad r^2 \sin^2(a) = \rho^2 \sin^2(\alpha).$$

On somme ces deux relations :

$$r^2(\cos^2(a) + \sin^2(a)) = \rho^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)).$$

Or :

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1,$$

donc on obtient $r^2 = \rho^2$. Comme r et ρ sont tous les deux positifs, on en déduit $r = \rho$. Ainsi :

$$\cos(a) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(a) = \sin(\alpha),$$

d'où le résultat en utilisant le [Lemme 12.1.9](#). ■

Terminons cette section avec un résultat qui découle immédiatement des constructions précédentes, connu sous le nom de formules d'Euler.

Proposition 12.2.7. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On peut simplement revenir à la définition de $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

et :

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta).$$

On obtient les formules d'Euler en additionnant et en soustrayant ces deux relations. ■

12.3 Exponentielle complexe

Définition 12.3.1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe par

$$\exp(z) := e^a e^{ib}.$$

Remarque 12.3.2. Si $z \in \mathbb{R}$, on retrouve bien l'exponentielle réelle : il s'agit donc bien ici d'une extension de l'exponentielle à l'ensemble des nombres complexes.

Proposition 12.3.3. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z').$$

Démonstration. On écrit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors

$$z + z' = (a + a') + i(b + b'),$$

donc :

$$\exp(z + z') = e^{a+a'} e^{i(b+b')}.$$

La première exponentielle est réelle et vérifie :

$$e^{a+a'} = e^a e^{a'}.$$

On a également montré que :

$$e^{i(b+b')} = e^{ib} e^{ib'},$$

donc :

$$\exp(z + z') = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = \exp(z) \exp(z').$$

■

Chapitre 13

Racines carrées d'un nombre complexe

13.1 Racines carrées

13.1.1 Rappel : le cas réel

À titre introductif, on se propose de revenir « proprement » sur le cas réel.

Définition 13.1.1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On appelle racine carrée de y tout réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$.

Une fois notre objet bien défini, il reste à vérifier qu'il existe bel et bien. C'est le but du résultat suivant.

Proposition 13.1.2. Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x^2 = y$.

Démonstration. On considère

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Comme f est polynomiale, elle est dérivable avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = 2x.$$

Ainsi, $f' \geq 0$ et on a même $f' > 0$ sur $]0, +\infty[$. Donc f est strictement croissante : elle est donc injective.

Par ailleurs, $f(0) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires assure la surjectivité de f . On a donc obtenu que f est bijective. En particulier, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$y = f(x) = x^2.$$

■

Remarque 13.1.3. Aucun réel strictement négatif n'admet de racine carrée (réelle). Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

Tout réel positif x admet donc une unique racine positive, que l'on note $\sqrt{x}$. On peut noter que $-\sqrt{x}$ est également une racine carrée de x , et que ce sont les seules.

13.1.2 Définition

Définition 13.1.4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z tout nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^2 = z$. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on appelle racine n -ème de z tout nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\zeta^n = z$.

Proposition 13.1.5. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\zeta^2 = z$.

Démonstration. Comme $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$. On pose $\zeta := \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. On peut alors vérifier que :

$$\zeta^2 = (\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}})^2 = re^{i\theta} = z.$$

■

Proposition 13.1.6. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soient $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ et $\zeta_2 \in \mathbb{C}$ deux racines carrées de z . Alors $\zeta_2 = \zeta_1$ ou $\zeta_2 = -\zeta_1$.

Démonstration. On commence par écrire :

$$\zeta_2^2 - \zeta_1^2 = z - z = 0.$$

Ainsi :

$$(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 + \zeta_1) = 0,$$

d'où le résultat.

■

En combinant ces deux résultats, on obtient le théorème suivant.

Théorème 13.1.7. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors z admet exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

Remarque 13.1.8. Le complexe 0 est exclu car il n'admet pas deux racines carrées (distinctes). Il en admet cependant une : 0 lui-même.

Remarque 13.1.9. Dans $\mathbb{R}$, la relation d'ordre permet de privilégier la racine carrée positive, qui est alors notée $\sqrt{x}$. Dans $\mathbb{C}$, il n'y a, a priori, rien qui permette de privilégier l'une ou l'autre racine d'un nombre complexe. La notation $\sqrt{z}$ n'a donc aucun sens (tant qu'on ne lui en donne pas).

13.1.3 Calcul pratique

En passant par la forme exponentielle

Cette méthode s'appuie sur le fait que multiplier deux complexes sous forme exponentielle donne un autre complexe sous forme exponentielle :

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

En particulier :

$$e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta}.$$

De plus, dans une forme exponentielle, c'est le module qui apparaît devant l'exponentielle, donc un réel positif, qui admet une racine (réelle positive). On peut donc remarquer :

$$(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}})^2 = r e^{i\theta}.$$

Autrement dit, si un complexe z est donné sous forme exponentielle $r e^{i\theta}$, il suffit de considérer la racine carrée de son module r , et la moitié de son argument θ pour obtenir une racine carrée. L'autre racine s'obtient en multipliant par -1 . Ainsi :

$$\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

donc les racines carrées de z . On notera que la seconde n'est pas donnée sous forme exponentielle. Pour obtenir sa forme exponentielle, on peut remarquer que $-1 = e^{i\pi}$. Ainsi :

$$-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\pi} \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r} e^{i\frac{2\pi + \theta}{2}}.$$

Exemple 13.1.10. On cherche les racines carrées de

$$z := 2 + 2i.$$

On commence par calculer sa forme trigonométrique. On a pour cela besoin de son module :

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On peut alors factoriser :

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

En en déduit directement sa forme exponentielle :

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ses deux racines carrées sont alors données par :

$$\zeta_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad \zeta_2 = -\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

On calcule la forme exponentielle de la seconde :

$$\zeta_2 = e^{i\pi}\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}.$$

En passant par la forme algébrique

Considérons un complexe donné sous forme algébrique :

$$z = a + ib.$$

On cherche $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de z . Écrivons ζ sous forme algébrique :

$$\zeta = x + iy.$$

Comme $\zeta^2 = z$, on obtient :

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib.$$

Autrement dit, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Ce système seul n'est cependant pas toujours simple à résoudre. Pour nous aider, on peut ajouter une autre condition. Comme $\zeta^2 = z$, on doit également avoir $|\zeta|^2 = |z|$, ce qui nous donne finalement le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on obtient :

$$2x^2 = r + a,$$

où $r := \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme $|a| \leq r$, on obtient :

$$x = \pm \sqrt{\frac{r+a}{2}}.$$

La différence entre les deux premières équations mène à :

$$y = \pm \sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

On a donc a priori quatre solutions possibles. La troisième équation permet de déterminer les bonnes :

$$xy = \frac{b}{2}.$$

Ainsi, en fonction du signe de b , on en déduit les signes de x et y . En effet, si $b \geq 0$, alors x et y sont de même signe. Si $b \leq 0$, alors x et y sont de signes opposés.

Exemple 13.1.11. Reprenons :

$$z = 2 + 2i.$$

On cherche une racine carrée sous forme algébrique :

$$\zeta = x + iy.$$

On écrivant les égalités $|\zeta|^2 = |z|$ et $\zeta^2 = z$, on obtient le système :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\sqrt{2}, \\ x^2 - y^2 &= 2, \\ 2xy &= 2. \end{aligned}$$

La somme des deux premières équations donne :

$$2x^2 = 2\sqrt{2} + 2,$$

soit :

$$x^2 = \sqrt{2} + 1,$$

et donc :

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

La différence des deux premières équations donne quant à elle :

$$2y^2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

donc :

$$y = \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Il reste à utiliser la troisième équation :

$$xy = 1 > 0,$$

donc x et y doivent être de même signe. Autrement dit :

$$\zeta = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}i \quad \text{ou} \quad \zeta = -\sqrt{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}i.$$

Exemple 13.1.12. Prenons un exemple sans passer par le module. Soit :

$$z := 3 + 4i.$$

On cherche une racine carrée sous forme algébrique :

$$\zeta = x + iy.$$

L'égalité $\zeta^2 = z$ donne le système :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 3, \\ 2xy &= 4. \end{aligned}$$

La deuxième équation donne $xy = 2$. En particulier, $xy \neq 0$ et ainsi $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On peut donc écrire :

$$y = \frac{2}{x}.$$

On injecte cela dans la première équation :

$$3 = x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{x^2}.$$

Multiplions le tout par x^2 :

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) \left(x^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \text{ ou } x^2 + 1 = 0.$$

La deuxième condition est impossible car $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$x^2 = 4,$$

soit :

$$x = \pm 2.$$

On obtient alors :

$$y = \pm 1,$$

c'est-à-dire :

$$\zeta = 2 + i \quad \text{ou} \quad \zeta = -2 - i.$$

13.2 Équations du second degré

Proposition 13.2.1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. Alors l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions dans $\mathbb{C}$. En notant $\Delta := b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine de Δ , ces solutions sont données par :

$$z_- = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_+ = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

On note $\Delta := b^2 - 4ac$, ce qui permet d'obtenir :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right).$$

Comme $\Delta \in \mathbb{C}$, on en trouve une racine carrée, que l'on note $\delta \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= a \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right) = 0 \\ &\iff z + \frac{b - \delta}{2a} = 0 \text{ ou } z + \frac{b + \delta}{2a} = 0 \\ &\iff z = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - \delta}{2a}. \end{aligned}$$

■

Exemple 13.2.2. On considère l'équation

$$z^2 + 2(1+i)z - \frac{3}{4} + i = 0.$$

Écrivons le polynôme sous forme factorisée :

$$\begin{aligned} z^2 + 2(1+i)z - \frac{3}{4} + i &= (z+1+i)^2 - (1+i)^2 - \frac{3}{4} + i \\ &= (z+1+i)^2 - 1 - 2i + 1 - \frac{3}{4} + i \\ &= (z+1+i)^2 - i - \frac{3}{4} \\ &= (z+1+i)^2 - \frac{3+4i}{4}. \end{aligned}$$

On reconnaît un complexe dont on a déjà calculé les racines :

$$\begin{aligned} z^2 + 2(1+i)z - \frac{3}{4} + i &= \left(z+1+i - \frac{2+i}{2}\right) \left(z+1+i + \frac{2+i}{2}\right) \\ &= \left(z + \frac{2+2i}{2} - \frac{2+i}{2}\right) \left(z + \frac{2+2i}{2} + \frac{2+i}{2}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{2}i\right) \left(z + 2 + \frac{3}{2}i\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi les racines du polynôme :

$$-\frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad -2 - \frac{3}{2}i.$$

Exemple 13.2.3. On considère l'équation

$$z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0.$$

Calculons le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4(-2+2i) = -2i.$$

On recherche alors une racine carrée $\delta = x + iy$ de Δ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ x^2 - y^2 &= 0, \\ 2xy &= -2. \end{aligned}$$

On obtient $x^2 = 1$, soit $x = \pm 1$, ainsi que $y^2 = 1$, soit $y = \pm 1$. Comme $xy < 0$, x et y doivent être de signes opposés. On fixe :

$$\delta = 1 - i.$$

On trouve alors nos racines :

$$\begin{aligned}z_+ &= \frac{1 + 3i + 1 - i}{2} = 1 + i, \\z_- &= \frac{1 + 3i - (1 - i)}{2} = 2i.\end{aligned}$$

Exemple 13.2.4. On considère l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Factorisons le polynôme :

$$\begin{aligned}z^2 - 2z + 2 &= (z - 1)^2 - 1 + 2 \\&= (z - 1)^2 + 1 \\&= (z - 1)^2 - (-1) \\&= (z - 1 - i)(z - 1 + i),\end{aligned}$$

d'où les racines :

$$1 + i \quad \text{et} \quad 1 - i.$$

Chapitre 14

Formules d'angle multiple et linéarisation

14.1 Forme du binôme

Définition 14.1.1. On définit la factorielle par récurrence en posant

$$0! := 1$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! := (n+1)n!.$$

On montre facilement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Exemple 14.1.2. Les premières valeurs de la factorielle se calculent facilement :

$$0! = 1,$$

$$1! = 1,$$

$$2! = 2,$$

$$3! = 2 \times 3 = 6,$$

$$4! = 2 \times 3 \times 4 = 24,$$

$$5! = 5 \times 4! = 120.$$

Définition 14.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$. On définit le coefficient

binomial $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») par :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Proposition 14.1.4. Les coefficients binomiaux sont entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, un seul cas est à considérer : $k = 0$. On obtient :

$$\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}.$$

L'assertion est donc vraie au rang $n = 0$. Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Deux cas sont immédiats :

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1},$$

donc le résultat est vrai si $k \in \{0, n+1\}$. Supposons donc $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On calcule :

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)! - (n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)! - (n+1)! + k(n!)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{k(n!)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\ &= \binom{n}{k-1}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, donc $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$. ■

Certaines valeurs particulières peuvent être obtenues directement de la définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Lemme 14.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration. On applique la définition, et tout le jeu consiste à mettre les fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} + \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n! - kn! + kn!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

■

Théorème 14.1.6. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a d'une part :

$$(a+b)^0 = 1,$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1,$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$. Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Commençons par écrire :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

par hypothèse de récurrence. On développe :

$$(a+b)^{n+1} = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

On effectue un changement d'indice dans la seconde somme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}. \end{aligned}$$

On applique le [Lemme 14.1.5](#) pour réécrire les coefficients binomiaux dans la somme. On remarque également :

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'égalité est vraie au rang $n+1$. ■

Un moyen de retrouver les coefficients binomiaux apparaissant dans la formule du binôme consiste à utiliser le triangle de Pascal. Ce triangle est construit ligne par ligne : on commence avec une première ligne constituée de deux « 1 ». On ajoute ensuite les autres lignes les unes après les autres en commençant par un « 1 ». Le deuxième coefficient est la somme du deuxième et du premier coefficients de la ligne précédente. Le troisième coefficient est la somme du troisième et du deuxième coefficients de la ligne précédentes, etc., jusqu'à épuisement de la ligne précédente, et on termine par un « 1 ».

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Ce tableau permet de lire les coefficients binomiaux : la n -ème ligne donne les coefficients de $(a + b)^n$. Par exemple, la première ligne donne les coefficients 1 et 1 :

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b.$$

Si on regarde la troisième ligne :

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3.$$

Quant aux puissances, on peut aussi les lire de gauche à droite. Chaque terme est un produit d'une puissance de a et d'une puissance de b . La somme de ces puissances doit toujours être égale à n . On commence avec a^n et b^0 , puis on diminue la puissance de a en augmentant la puissance de b , jusqu'à atteindre a^0 et b^n .

14.2 Formule d'angle multiple

Rappelons la formule de Moivre, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

On peut notamment en déduire :

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^n).$$

L'idée est alors d'utiliser la formule du binôme pour développer $(\cos(x) + i \sin(x))^n$ et en déduire des expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Lemme 14.2.1. Soit $(y_k)_{k=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n i^k y_k\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k y_{2k} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n i^k y_k\right) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} (-1)^k y_{2k+1}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad i^k = e^{ik\frac{\pi}{2}} = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n i^k y_k = \sum_{k=0}^n y_k \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

On en déduit :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n i^k y_k\right) = \sum_{k=0}^n y_k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Supposons que n soit pair : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n i^k y_k \right) &= \sum_{k=0}^m y_{2k} \underbrace{\cos \left(2k \frac{\pi}{2} \right)}_{=(-1)^k} + \sum_{k=0}^{m-1} y_{2k+1} \underbrace{\cos \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k y_{2k}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que n soit impair : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m+1$. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n i^k y_k \right) &= \sum_{k=0}^m y_{2k} \underbrace{\cos \left(2k \frac{\pi}{2} \right)}_{=(-1)^k} + \sum_{k=0}^m y_{2k+1} \underbrace{\cos \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right)}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k y_{2k}. \end{aligned}$$

On procède de façon similaire pour la partie imaginaire. ■

Proposition 14.2.2. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x), \\ \sin(nx) &= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x). \end{aligned}$$

Démonstration. On part de :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x).$$

On obtient le résultat en appliquant le lemme suivant après avoir posé :

$$y_k := \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \sin^k(x).$$
■

Exemple 14.2.3. Développons :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^2 = \cos^2(x) + 2i \cos(x) \sin(x) - \sin^2(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^2) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1,\end{aligned}$$

et :

$$\sin(2x) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^2) = 2 \cos(x) \sin(x).$$

Exemple 14.2.4. Développons :

$$(\cos(x) + i \sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - 3i \sin^3(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^3) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x),\end{aligned}$$

et :

$$\sin(3x) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^3) = 3 \cos^2(x) \sin(x) - 3 \sin^3(x).$$

Exemple 14.2.5. On peut utiliser l'exemple précédent pour calculer

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

En effet :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

14.3 Linéarisation

Le procédé de linéarisation consiste à faire l'opposé de ce qui a été fait dans la section précédente : on cherche à exprimer $\cos(x)^n$ et $\sin(x)^n$ en fonction de termes ne faisant intervenir aucune puissance, c'est-à-dire de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$. Ici, l'idée est de partir des formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ainsi :

$$(\cos(x))^n = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad (\sin(x))^n = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n.$$

Là encore, on applique la formule du binôme, puis on simplifie l'expression.

Proposition 14.3.1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, alors :

$$\begin{aligned} (\cos(x))^n &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x), \\ (\sin(x))^n &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{m} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} \binom{n}{k} \cos((n-2k)x) \end{aligned}$$

où $n = 2m$. Si n est impair, alors :

$$\begin{aligned} (\cos(x))^n &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cos((n-2k)x), \\ (\sin(x))^n &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \binom{n}{k} \sin((n-2k)x) \end{aligned}$$

où $n = 2m + 1$.

Démonstration. Commençons par appliquer la formule d'Euler puis la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (\cos(x))^n &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{2^n} (e^{ix} + e^{-ix})^n \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Considérons le cas où n est impair : on écrit $n = 2m + 1$. Alors :

$$(\cos(x))^n = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} \right).$$

On s'intéresse à la seconde somme où on change l'indice de sommation. Posons $\ell := n - k$. Alors :

$$\sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = \sum_{\ell=0}^m \binom{n}{n-\ell} e^{i\ell x} e^{-i(n-\ell)x}.$$

Or, $\binom{n}{n-\ell} = \binom{n}{\ell}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} (\cos(x))^n &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + \sum_{\ell=0}^m \binom{n}{\ell} e^{i\ell x} e^{-i(n-\ell)x} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} (e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + e^{i\ell x} e^{-i(n-\ell)x}) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} (e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{e^{i(n-2k)x} + e^{-i(n-2k)x}}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cos((n-2k)x). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où n est pair : on écrit $n = 2m$. Alors :

$$(\cos(x))^n = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + \binom{n}{m} e^{i(n-m)x} e^{-imx} + \sum_{k=m+1}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} \right).$$

Comme $n = 2m$, $n - m = m$:

$$e^{i(n-m)x} e^{-imx} = 1.$$

On obtient alors la formule de la même façon que dans le cas impair.

On procède de manière similaire pour le sinus. On part cette fois-ci de :

$$\begin{aligned} (\sin(x))^n &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} (-1)^k e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Dans le cas $n = 2m + 1$, on obtient :

$$(\sin(x))^n = \frac{1}{(2i)^n} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + \sum_{k=m+1}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} \right).$$

En faisant le même changement d'indice que dans le cas du cosinus, on trouve :

$$(\sin(x))^n = \frac{1}{(2i)^n} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} + \sum_{\ell=0}^m (-1)^{n-\ell} \binom{n}{n-\ell} e^{i\ell x} e^{-i(n-\ell)x} \right).$$

Or, $n = 2m + 1$, donc :

$$(-1)^{n-\ell} = (-1)^{2m+1-\ell} = -(-1)^\ell.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\sin(x))^n &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} (e^{i(n-k)x} e^{-ikx} - e^{ikx} e^{-i(n-k)x}) \\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} \frac{e^{i(n-2k)x} - e^{-i(n-2k)x}}{2i} \\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} \sin((n-2k)x). \end{aligned}$$

Pour terminer ce cas, on remarque :

$$i^{n-1} = i^{2m+1-1} = (i^2)^m = (-1)^m,$$

et on obtient la formule annoncée.

Il reste alors le cas $n = 2m$. Le principe est le même que dans le cas du cosinus : on isole le terme du milieu. On remarque que dans ce cas :

$$(-1)^{n-k} = (-1)^{2m-k} = (-1)^k,$$

et que :

$$i^n = i^{2m} = (-1)^m,$$

d'où le résultat. ■

Exemple 14.3.2. Testons une puissance impaire :

$$\begin{aligned} \cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{2^3} (e^{ix} + e^{-ix})^3 \\ &= \frac{1}{2^3} (e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{2^3} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3\cos(x)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \sin(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\
 &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\
 &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
 &= \frac{1}{(2i)^2} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} (\sin(3x) - 3\sin(x)).
 \end{aligned}$$

Exemple 14.3.3. Testons maintenant une puissance paire :

$$\begin{aligned}
 \cos(x)^4 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2^4} (e^{ix} + e^{-ix})^4 \\
 &= \frac{1}{2^4} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{2^4} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{2^3} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 6 \right) \\
 &= \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 6)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \sin(x)^4 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{(2i)^4} (e^{ix} - e^{-ix})^4 \\
 &= \frac{1}{(2i)^4} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{(2i)^4} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{2^3 i^4} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 6 \right) \\
 &= \frac{1}{8} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 6).
 \end{aligned}$$

Exemple 14.3.4. Utilisons les exemples précédents pour déterminer une primitive de la fonction

$$f: x \mapsto \cos^3(x) \sin^4(x).$$

Partons de :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
 &= \frac{1}{128} (e^{7ix} - 4e^{5ix} + 6e^{3ix} - 4e^{ix} + e^{-ix} + 3e^{5ix} - 12e^{3ix} + 18e^{ix} - 12e^{-ix} \\
 &\quad + 3e^{-3ix} + 3e^{3ix} - 12e^{ix} + 18e^{-ix} - 12e^{-3ix} + 3e^{-5ix} \\
 &\quad + e^{ix} - 4e^{-ix} + 6e^{-3ix} - 4e^{-5ix} + e^{-7ix}) \\
 &= \frac{1}{64} \left(\frac{e^{7ix} + e^{-7ix}}{2} - \frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{64} (\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x)).
 \end{aligned}$$

On en déduit une primitive :

$$x \mapsto \frac{1}{64} \left(\frac{1}{7} \sin(7x) - \frac{1}{5} \sin(5x) - \sin(3x) + 3\sin(x) \right).$$

Annexe A

Construction de l'exponentielle

Il existe différentes définitions de la fonction exponentielle (qui sont bien sûr toutes équivalentes dans le sens où elles construisent bien le même objet). On propose ici de construire la fonction exponentielle comme une fonction f satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Tout l'enjeu est de montrer qu'une telle fonction existe. Plus précisément, la fonction identiquement nulle est une solution triviale de cette équation : on souhaite donc montrer qu'il existe des solutions non identiquement nulles.

A.1 Quelques propriétés

On peut commencer par établir quelques propriétés qui découlent directement de l'hypothèse visée.

Lemme A.1.1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Alors :

1. f ne s'annule jamais ;
2. $f(0) = 1$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)^{-1}$.

Démonstration. 1. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = f(x - y + y) = f((x - y) + y) = f(x - y)f(y)$$

par hypothèse sur f . Or, $f(y) = 0$, donc on obtient $f(x) = 0$. Comme x est quelconque, cela signifie que f est identiquement nulle. Comme ce n'est pas le cas, il n'existe aucun point en lequel f s'annule.

2. On applique l'hypothèse avec $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = f(0)^2.$$

Ainsi, $f(0) \in \{0, 1\}$. Or, f ne s'annule jamais, donc $f(0) = 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Or, $f(x) \neq 0$, donc $f(x) > 0$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ Alors :

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x)f(-x),$$

d'où le résultat. ■

Lemme A.1.2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Alors f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x).$$

Démonstration. Comme f est continue, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$, que l'on note F . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} g_x: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto F(x + y) - f(x)F(y) \end{aligned}$$

qui est dérivable car F est elle-même dérivable. De plus :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'_x(y) &= F'(x + y) - f(x)F'(y) \\ &= f(x + y) - f(x)f(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse sur f . Ainsi, g_x est constante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g_x(y) = g_x(0) = F(x) - f(x)F(0).$$

Autrement dit, on a obtenu :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x + y) - f(x)F(y) = F(x) - f(x)F(0),$$

c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x + y) - F(x) = f(x)(F(y) - F(0)).$$

Si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F(y) = F(0),$$

alors on obtient directement, en dérivant cette relation :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = 0,$$

et f est identiquement nulle. Supposons maintenant qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ pour lequel $F(y) \neq F(0)$. Pour un tel y , on peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{F(x + y) - F(x)}{F(y) - F(0)}.$$

Comme F est dérivable, ceci implique que f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

Revenons maintenant à l'hypothèse de départ sur f , que l'on dérive par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f(x)f'(y).$$

On applique cette égalité avec $y = 0$ pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(0)f(x).$$

■

A.2 Puissances entières

Pour un certain $a > 0$ donné, on définit la fonction puissance :

$$\mathcal{P}_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto \begin{cases} a^n := \prod_{k=1}^n a, & \text{si } n \geq 1, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Cette définition implique directement la propriété voulue (mais seulement sur $\mathbb{N}$) :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathcal{P}_a(n + m) = \mathcal{P}_a(n)\mathcal{P}_a(m).$$

De plus, $a > 0$ donc, en particulier, $a \neq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_a(n) \neq 0.$$

On peut alors étendre cette fonction à $\mathbb{Z}$, en une nouvelle fonction toujours notée $\mathcal{P}_a$:

$$\mathcal{P}_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto \begin{cases} a^n, & \text{si } n \geq 1, \\ 1, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{si } n \leq -1. \end{cases}$$

Là encore, on obtient directement la propriété voulue sur le domaine de définition :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \mathcal{P}_a(n + m) = \mathcal{P}_a(n) \mathcal{P}_a(m).$$

Proposition A.2.1. La fonction $\mathcal{P}_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est :

1. strictement croissante si $a > 1$;
2. strictement décroissante si $a < 1$;
3. constante si $a = 1$.

Démonstration. 1. Supposons $a > 1$. Alors $a^2 = a \times a > 1 \times a = a > 1$, et ainsi de suite. On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, a^n > a^m > 1,$$

donc $\mathcal{P}_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. La fonction $n \mapsto -n$ est strictement décroissante, et la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante, donc on déduit de ce qui précède que la fonction $\mathcal{P}_a$ est aussi strictement croissante sur les entiers négatifs.

2. Le raisonnement est le même que dans le cas précédent : la différence est qu'on obtient $a^2 < 1$, ce qui « renverse » les inégalités obtenues.
3. On peut procéder par récurrence pour montrer que, dans ce cas, $a^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

■

A.3 Racines

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$g_n :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto x^n$$

est strictement croissante. On peut alors montrer qu'elle est bijective. Ainsi, toujours pour $a > 0$, on peut définir $a^{1/n}$ comme l'unique solution de l'équation $g_n(x) = a$.

Proposition A.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

1. si $a = 1$, $a^{1/n} = 1$;

- 2. si $a > 1$, $a^{1/n} > 1$;
- 3. si $a < 1$, $a^{1/n} < 1$.

Démonstration. 1. Supposons que $a = 1$. Il suffit de remarquer que $1^n = 1$. Par unicité de la solution de cette équation, on obtient alors $a^{1/n} = 1$.

2. On procède par contraposée. Supposons $a^{1/n} \leq 1$. Comme dans la preuve de la [Proposition A.2.1](#), on montre alors que $a = (a^{1/n})^n \leq 1$.

3. Un raisonnement par contraposée permet aussi de montrer ce résultat. ■

Proposition A.3.2. Pour tout $a > 0$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a^{1/m} = 1.$$

Démonstration. Le cas $a = 1$ est trivial. Supposons $a > 1$. Par le résultat précédent, on sait alors que $a^{1/m} > 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $a^{1/m} - 1 > 0$, d'où :

$$a = (a^{1/m})^m = (1 + (a^{1/m} - 1))^m > 1 + m(a^{1/m} - 1),$$

et ainsi :

$$0 < a^{1/m} - 1 < \frac{a - 1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où le résultat pour $a > 1$. Si $a < 1$, on pose

$$b := \frac{1}{a} > 1.$$

Par ce qui précède, on obtient directement

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b^{1/m} = 1.$$

Ainsi :

$$a^{1/m} = \frac{1}{b^{1/m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1. \quad \blacksquare$$

A.4 Puissances rationnelles

Tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ peut s'écrire $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Avec ce qui précède, on a donc tout ce qu'il faut pour étendre naturellement notre fonction puissance aux rationnels :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ r = \frac{p}{q} &\mapsto (a^{1/q})^p. \end{aligned}$$

La propriété voulue est une conséquence directe de ce qui précède :

$$\forall (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2, \quad \mathcal{P}_a(r_1 + r_2) = \mathcal{P}_a(r_1)\mathcal{P}_a(r_2).$$

Mais ceci ne tient la route que si la fonction est bien définie, ce qui est assuré par le résultat précédent.

Lemme A.4.1. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Alors

$$\mathcal{P}_a\left(\frac{p}{q}\right) = \mathcal{P}_a\left(\frac{p'}{q'}\right).$$

Démonstration. On note

$$b := a^{1/q} \quad \text{et} \quad b' := a^{1/q'},$$

puis :

$$\tilde{b} := b^{1/q'} \quad \text{et} \quad \tilde{b}' := (b')^{1/q}.$$

On peut par ailleurs définir

$$c := a^{1/(qq')}.$$

Or :

$$\tilde{b}^{qq'} = (\tilde{b}^{q'})^q = b^q = a,$$

d'où l'on déduit $\tilde{b} = c$ par unicité de la racine. De même, $\tilde{b}' = c$. On obtient alors :

$$\mathcal{P}_a\left(\frac{p}{q}\right) = (a^{1/q})^p = b^p = (\tilde{b}^{q'})^p = \tilde{b}^{pq'} = c^{pq'}.$$

Or, $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, donc $pq' = p'q$. Ainsi :

$$\mathcal{P}_a\left(\frac{p}{q}\right) = c^{p'q} = (\tilde{b}')^{p'q} = (\tilde{b}'^q)^{p'} = (b')^{p'} = (a^{1/q'})^{p'} = \mathcal{P}_a\left(\frac{p'}{q'}\right).$$

■

Proposition A.4.2. La fonction $\mathcal{P}_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est :

1. strictement croissante si $a > 1$;
2. strictement décroissante si $a < 1$;
3. constante si $a = 1$.

Démonstration. Soient $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}$ tel que $r_1 < r_2$. On pose

$$r_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ avec } (p_1, q_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p_2}{q_2} \text{ avec } (p_2, q_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*.$$

Alors :

$$r_1 = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} = \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{q}} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{q}}$$

avec $\tilde{p}_1 := p_1 q_2$ et $\tilde{p}_2 := p_2 q_1$. Ainsi :

$$a^{r_1} = (a^{1/q})^{\tilde{p}_1} \quad \text{et} \quad a^{r_2} = (a^{1/q})^{\tilde{p}_2}.$$

Le résultat est alors une conséquence de la [Proposition A.2.1](#) car $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_2$. ■

A.5 Puissances réelles

Lemme A.5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x et pour laquelle la suite $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

Démonstration. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}.$$

Par définition de la partie entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

d'où, en divisant par 10^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

On en déduit notamment que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Par ailleurs, toujours de la définition de la partie entière, on tire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x.$$

Or, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$, et $10 \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$, donc :

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor,$$

ce qui implique, en divisant par 10^{n+1} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n \leq r_{n+1},$$

et ainsi la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée, elle converge. En passant à la limite dans l'inégalité plus haut, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x.$$

Posons maintenant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n := a^{r_n},$$

qui est bien définie puisque tous les r_n sont rationnels. Supposons $a > 1$. Alors, comme la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également croissante. Elle est de plus majorée, par exemple par $a^{\lfloor x+1 \rfloor}$, donc elle converge. Si $a < 1$, la suite est décroissante, et on montre de même qu'elle est convergente en la minorant. Enfin, si $a = 1$, elle est constante égale à 1 et il n'y a rien à faire. ■

Lemme A.5.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites rationnelles qui convergent vers x . Alors la suite $\left(\frac{a^{r_n}}{a^{r'_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers 1.

Démonstration. La fonction $\mathcal{P}_a$ est bien définie que $\mathbb{Q}$ et ne s'annule pas, donc la suite considérée est bien définie. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a^{r_n}}{a^{r'_n}} = a^{r_n - r'_n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(a^{1/m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1, il existe $M^+ \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geq M^+, \quad |a^{1/m} - 1| < \varepsilon.$$

De même, il existe $M^- \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geq M^-, \quad |a^{-1/m} - 1| < \varepsilon.$$

On pose $M := \max(M^+, M^-)$. Soit $m \geq M$. Comme $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite, leur différence tend vers 0. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |r_n - r'_n| < \frac{1}{m}.$$

Soit alors $n \geq N$. Alors :

$$-\frac{1}{m} < r_n - r'_n < \frac{1}{m}.$$

Supposons $a > 1$. Comme la fonction $\mathcal{P}_a$ est strictement croissante, on obtient :

$$a^{-1/m} < a^{r_n - r'_n} < a^{1/m}.$$

Or, $m \geq M \geq M^+$, donc $a^{1/m} < 1 + \varepsilon$. De même, $m \geq M \geq M^-$, donc $1 - \varepsilon < a^{-1/m}$. Ainsi :

$$1 - \varepsilon < a^{r_n - r'_n} < 1 + \varepsilon,$$

donc la suite $(a^{r_n - r'_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. Un raisonnement similaire montre la même limite lorsque $a < 1$, et le cas $a = 1$ est trivial. ■

Lemme A.5.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers x . Alors $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie qui ne dépend pas de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. On a précédemment construit une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante qui converge vers x et pour laquelle la suite $(a^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. Considérons deux suites $(\tilde{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{r}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers x . Par le lemme précédent, on a alors :

$$\frac{a^{\tilde{r}_n}}{a^{r_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Comme $a^{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, on en déduit $a^{\tilde{r}_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. De même, on obtient $a^{\tilde{r}'_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. ■

A.6 Continuité

Proposition A.6.1. La fonction $\mathcal{P}_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve une suite $(r_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x_n . Par définition, la suite $(a^{r_{n,m}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge donc vers a^{x_n} .

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_0(n) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geq M_0(n), \quad |r_{n,m} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et il existe $M_1(n) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m \geq M_1(n), \quad |a^{r_{n,m}} - a^{x_n}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose alors $M(n) := \max(M_0(n), M_1(n))$ et $\tilde{r}_n := r_{n,M(n)}$.

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_0, \quad |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq N_0$, on a donc :

$$|x - \tilde{r}_n| \leq |x - x_n| + |x_n - r_{n,M(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et on en déduit que la suite $(\tilde{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Ainsi, la suite $(a^{\tilde{r}_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a^x , donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |a^x - a^{\tilde{r}_n}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq N$, on a alors :

$$|a^x - a^{x_n}| \leq |a^x - a^{\tilde{r}_n}| + |a^{r_{n,M(n)}} - a^{x_n}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(a^{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a^x . ■

A.7 Exponentielle

Théorème A.7.1. Soit $a > 0$. Il existe une unique fonction f continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$

et telle que $f(1) = a$.

Démonstration. L'existence est donnée par ce qui précède : la fonction $\mathcal{P}_a$ convient. Il s'agit donc de montrer que c'est la seule. Soit pour cela f une telle fonction. Commençons par remarquer :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = f(0)^2,$$

donc $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors :

$$a = f(1) = f(1 + 0) = f(1)f(0) = 0,$$

ce qui est absurde, donc $f(0) = 1 = \mathcal{P}_a(0)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f(n) = f\left(\sum_{k=1}^n 1\right) = \prod_{k=1}^n f(1) = a^n = \mathcal{P}_a(n).$$

Soit alors $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$. Alors :

$$1 = f(0) = f(n - n) = f(n)f(-n),$$

donc $f(n) = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{a^{-n}} = \mathcal{P}_a(n)$.

Considérons maintenant $r \in \mathbb{Q}$. On note $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Partons de :

$$f(p) = f\left(q \frac{p}{q}\right) = f(qr) = f(r)^q.$$

Ainsi :

$$f(r) = f(p)^{1/q} = (a^p)^{1/q} = \mathcal{P}_a(r).$$

Finalement, considérons $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x.$$

Par continuité de f , on obtient alors :

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n).$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(r_n) = \mathcal{P}_a(r_n),$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_a(r_n) = \mathcal{P}_a(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n) = \mathcal{P}_a(x)$$

par continuité de $\mathcal{P}_a$.

On a donc montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathcal{P}_a(x),$$

ce qui signifie $f = \mathcal{P}_a$. ■

Définition A.7.2. Soit $a > 0$. La fonction définie dans le [Théorème A.7.1](#) est appelée exponentielle en base a et est notée $\exp_a$.

On peut montrer qu'une fonction dérivable f telle que $f' = f$ n'est autre que $\mathcal{P}_a$, pour un certain $a > 0$. L'unicité peut être obtenue en fixant $f(0)$.