
Notes de cours

Équation de transport

Jérémy Heleine

Agrégation externe de mathématiques

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Dernière mise à jour : 2 décembre 2024

Pour toute question ou remarque : jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Table des matières

Table des matières	i
1 Étude de l'équation continue	1
1.1 Modélisation	1
1.2 Vitesse constante	2
1.3 Vitesse variable	4
2 Différences finies	6
2.1 Schéma décentré à gauche	6
2.1.1 Définition du schéma	6
2.1.2 Erreur de consistance	7
2.1.3 Stabilité	8
2.1.4 Convergence	9
2.2 Schéma décentré à droite	10
2.3 Schéma explicite centré	11
2.4 Cas pratique : en domaine borné	12
2.4.1 Conditions de Dirichlet	12
2.4.2 Conditions périodiques	14
2.5 Diffusion et dispersion	15
2.5.1 Onde plane	15
2.5.2 Équation équivalente	16

Chapitre 1

Étude de l'équation continue

1.1 Modélisation

On considère une route rectiligne et infinie sur laquelle circulent des véhicules. On suppose que tous les véhicules avancent à la même vitesse constante $c \in \mathbb{R}$ et on interdit les dépassements. On note $u(t, x)$ la densité de véhicules en un point $x \in \mathbb{R}$ à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $X(t, x_0)$ la position à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$ d'un véhicule qui occupait la position $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'instant $t = 0$. Par définition de la vitesse, on a alors :

$$\frac{d}{dt} X(t, x_0) = c.$$

Comme les dépassements ne sont pas autorisés, le nombre de véhicules situés entre deux véhicules donnés reste constant au cours du temps. Autrement dit, pour $x_0 < x_1$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} u(t, x) \, dx = 0.$$

Lemme 1.1.1. Soit

$$I: t \mapsto \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) \, dx,$$

avec a et b deux fonctions continues et dérivables, et f continue, intégrable et telle que $\partial_t f$ est intégrable. Alors :

$$I'(t) = b'(t)f(t, b(t)) - a'(t)f(t, a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(t, x) \, dx.$$

Démonstration. On définit :

$$F: (u, v, t) \mapsto \int_u^v f(t, x) \, dx,$$

de sorte que :

$$I(t) = F(a(t), b(t), t),$$

et donc :

$$I'(t) = a'(t)\partial_u F(a(t), b(t), t) + b'(t)\partial_v F(a(t), b(t), t) + \partial_t F(a(t), b(t), t).$$

Il suffit alors d'expliciter les dérivées partielles de F pour conclure. ■

En appliquant le lemme, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\frac{d}{dt}X(t, x_1)}_{=c} u(t, X(t, x_1)) - \underbrace{\frac{d}{dt}X(t, x_0)}_{=c} u(t, X(t, x_0)) + \int_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} \partial_t u(t, x) \, dx \\ &= c(u(t, X(t, x_1)) - u(t, X(t, x_0))) + \int_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} \partial_t u(t, x) \, dx. \end{aligned}$$

Or :

$$u(t, X(t, x_1)) - u(t, X(t, x_0)) = [u(t, x)]_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} = \int_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} \partial_x u(t, x) \, dx.$$

Ainsi :

$$\int_{X(t, x_0)}^{X(t, x_1)} (\partial_t u(t, x) + c\partial_x u(t, x)) \, dx.$$

Comme ceci est valable quels que soient x_0 et x_1 réels, on a ainsi obtenu :

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0.$$

1.2 Vitesse constante

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0, & \text{sur } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (T)$$

où $c \in \mathbb{R}$ est fixée et u_0 est une fonction donnée.

Commençons par étudier formellement le problème, sans se préoccuper des conditions sur les données. L'idée est de modéliser un « transport », avançant à vitesse constante. Autrement dit, la valeur de u à un certain temps $t + \Delta t$ est simplement la valeur de u au temps t translatée à la vitesse c . Une idée est alors d'exprimer la position en fonction du temps :

$$x = X(t, x_0)$$

avec $X(0, x_0) = x_0$, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. On a ainsi :

$$\frac{d}{dt}X(t, x_0) = c,$$

ce qui nous donne :

$$X(t, x_0) = ct + X(0, x_0) = ct + x_0.$$

On montre que u est constante le long de ces trajectoires (appelées caractéristiques) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t, X(t, x_0)) &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + \frac{d}{dt}X(t, x_0)\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + c\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t, X(t, x_0)) = u(0, X(0, x_0)) = u(0, x_0) = u_0(x_0).$$

Or, $x = X(t, x_0) = ct + x_0$, donc :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Théorème 1.2.1. Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors le problème (T) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ donnée par :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Démonstration. Existence. On vérifie que

$$u: (t, x) \mapsto u_0(x - ct)$$

est bien solution de (T).

Unicité. On commence par une relation de conservation d'énergie. Si u est solution de (T), alors :

$$\partial_t(u^2) = 2(\partial_t u)u = -c \cdot 2(\partial_x u)u = -c\partial_x(u^2).$$

Pour tous $a < b$ et $t > 0$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\int_{a+ct}^{b+ct} u^2(t, x) \, dx \right) &= cu^2(t, b+ct) - cu^2(t, a+ct) + \int_{a+ct}^{b+ct} \partial_t(u^2)(t, x) \, dx \\ &= c[u^2(t, x)]_{a+ct}^{b+ct} - c \int_{a+ct}^{b+ct} \partial_x(u^2)(t, x) \, dx \\ &= c \int_{a+ct}^{b+ct} \partial_x(u^2)(t, x) \, dx - c \int_{a+ct}^{b+ct} \partial_x(u^2)(t, x) \, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall a < b, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{a+ct}^{b+ct} u^2(t, x) \, dx = \int_a^b u^2(0, x) \, dx = \int_a^b u_0^2(x) \, dx.$$

On en déduit l'unicité de la solution : la différence entre deux solutions vérifie (T) avec $u_0 = 0$. ■

Exemple 1.2.2. On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \cos(2\pi x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On pose $x = X(t, x_0)$ avec

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t, x_0) = \frac{1}{2}, & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \\ X(0, x_0) = x_0, \end{cases}$$

pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$x = X(t, x_0) = \frac{1}{2}t + x_0,$$

d'où :

$$x_0 = x - \frac{1}{2}t.$$

On vérifie que la solution est constante le long de ces caractéristiques :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, X(t, x_0)) &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + \frac{d}{dt} X(t, x_0) \partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + \frac{1}{2} \partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t, x) = u(t, X(t, x_0)) = u(0, X(0, x_0)) = \cos\left(2\pi\left(x - \frac{1}{2}t\right)\right).$$

1.3 Vitesse variable

On se penche maintenant sur le cas où la vitesse peut varier, aussi bien au cours du temps que dans l'espace. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c(t, x) \partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (T_v)$$

où c et u_0 sont des fonctions données.

En nous inspirant du cas de la vitesse constante, on recherche des solutions constantes le long des courbes caractéristiques définies par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t, x_0) = c(t, X(t, x_0)), \\ X(0, x_0) = x_0, \end{cases} \quad (C)$$

pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Sous les bonnes hypothèses de régularité sur c , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution au problème (C). On montre alors que u est bien constante le long de ces courbes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, X(t, x_0)) &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + \frac{d}{dt}X(t, x_0)\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + c(t, X(t, x_0))\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t, X(t, x_0)) = u(0, X(0, x_0)) = u_0(x_0).$$

Exemple 1.3.1. On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + 2t\partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \sin(2\pi x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On pose $x = X(t, x_0)$ avec

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t, x_0) = 2t, & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \\ X(0, x_0) = x_0, \end{cases}$$

pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$x = X(t, x_0) = t^2 + x_0,$$

d'où :

$$x_0 = x - t^2.$$

On vérifie que la solution est constante le long de ces caractéristiques :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, X(t, x_0)) &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + \frac{d}{dt}X(t, x_0)\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= \partial_t u(t, X(t, x_0)) + 2t\partial_x u(t, X(t, x_0)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(t, x) = u(t, X(t, x_0)) = u(0, X(0, x_0)) = \sin(2\pi(x - t^2)).$$

Chapitre 2

Différences finies

On cherche à résoudre numériquement l'équation de transport à vitesse constante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $c > 0$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ données. On se donne pour cela un pas de temps $\Delta t > 0$ ainsi qu'un pas d'espace $\Delta x > 0$. On recherche une approximation u_j^n de u aux points (t^n, x_j) définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t^n := n\Delta t \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad x_j := j\Delta x.$$

2.1 Schéma décentré à gauche

2.1.1 Définition du schéma

On approche la dérivée en temps et la dérivée en espace par :

$$\partial_t u(t^n, x_j) \approx \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \partial_x u(t^n, x_j) \approx \frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{\Delta x}.$$

On obtient le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Ce schéma est dit explicite en temps car la connaissance des u_j^n , pour un certain $n \in \mathbb{N}$, permet d'obtenir explicitement les u_j^{n+1} , sans avoir à réaliser d'opérations « lourdes » (comme l'inversion d'un système ou la résolution d'une équation quelconque). En effet :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &= (1 - \lambda) u_j^n + \lambda u_{j-1}^n, \end{aligned}$$

où $\lambda := c \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0$. On initialise ce schéma de manière naturelle :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^0 = u_0(x_j).$$

2.1.2 Erreur de consistance

On souhaite savoir si le schéma permet bien d'approcher l'équation, c'est-à-dire si :

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} R_j^n(\Delta t, \Delta x) = 0,$$

où :

$$R_j^n(\Delta t, \Delta x) := \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + c \frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{\Delta x}.$$

L'idée consiste simplement à utiliser la solution exacte dans le schéma et de voir si on approche bien la valeur attendue (qui n'est autre que 0 en l'absence de terme source).

On se place sur un intervalle borné en temps, de la forme $]0, T[$ avec $T > 0$, et on suppose $u \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R})$ à dérivées secondes bornées. On peut alors écrire :

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(\tau^n, x_j), \quad \text{avec } \tau^n \in]t^n, t^{n+1}[$$

ainsi que :

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, \xi_j), \quad \text{avec } \xi_j \in]x_{j-1}, x_j[.$$

On peut ainsi exprimer l'erreur de consistance :

$$R_j^n(\Delta t, \Delta x) = \underbrace{\partial_t u(t^n, x_j) + c \partial_x u(t^n, x_j)}_{=0} + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 u(\tau^n, x_j) - c \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 u(t^n, \xi_j),$$

d'où :

$$|R_j^n(\Delta t, \Delta x)| \leq \frac{M}{2} (\Delta t + c \Delta x),$$

où :

$$M := \max \left(\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |\partial_t^2 u(t, x)|, \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |\partial_x^2 u(t, x)| \right).$$

Le schéma est donc bien consistant avec l'équation à l'ordre 1 en temps et en espace. On peut cependant aller un peu plus loin dans certains cas. Supposons pour cela $u \in \mathcal{C}^3$, de sorte que l'on trouve $\tau^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\xi_j \in]x_{j-1}, x_j[$ tels que :

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 u(\tau^n, x_j),$$

ainsi que :

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, \xi_j).$$

Or, $\partial_t u = -c \partial_x u$, d'où $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$. Ainsi :

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 u(\tau^n, x_j).$$

L'erreur de consistance devient :

$$\begin{aligned} R_j^n(\Delta t, \Delta x) &= \left(c^2 \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\Delta x}{2} \right) \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\tau^n, x_j) + c \frac{\Delta x^2}{6} \partial_x^3 u(t^n, \xi_j) \\ &= \frac{c \Delta x}{2} (\lambda - 1) \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_t^3 u(\tau^n, x_j) + c \frac{\Delta x^2}{6} \partial_x^3 u(t^n, \xi_j). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda = 1$, alors le schéma devient d'ordre 2 en espace et en temps.

2.1.3 Stabilité

Dans la pratique, on n'a pas accès à une précision infinie : le calcul des u_j^{n+1} se fait en précision finie, et u_0 n'est d'ailleurs pas nécessairement connue de manière exacte (bruit, imprécisions, ...). On doit donc s'assurer que le schéma est robuste par rapport aux perturbations : on parle de stabilité. Dans notre contexte, on dira que le schéma est stable si la différence entre la solution exacte du schéma et le résultat du calcul numérique est bornée (en temps fini). Notons $\tilde{u}_j^n$ les valeurs exactes du schéma :

$$\begin{cases} \tilde{u}_j^0 = u_0(x_j), \\ \tilde{u}_j^{n+1} = (1 - \lambda) \tilde{u}_j^n + \lambda \tilde{u}_{j-1}^n. \end{cases}$$

On note alors u_j^n les valeurs numériques du schéma :

$$\begin{cases} u_j^0 = u_0(x_j) + \delta_j^0, \\ u_j^{n+1} = (1 - \lambda) u_j^n + \lambda u_{j-1}^n + \delta_j^{n+1}, \end{cases}$$

où les δ_j^n représentent les erreurs numériques (supposées bornées et faibles). On définit l'erreur $e_j^n := u_j^n - \tilde{u}_j^n$. On obtient facilement :

$$e_j^{n+1} = (1 - \lambda) e_j^n + \lambda e_{j-1}^n + \delta_j^{n+1}.$$

Supposons $0 < \lambda \leq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq (1 - \lambda) |e_j^n| + \lambda |e_{j-1}^n| + |\delta_j^{n+1}| \\ &\leq (1 - \lambda) \|e^n\|_\infty + \lambda \|e^n\|_\infty + \|\delta^{n+1}\|_\infty \\ &= \|e^n\|_\infty + \|\delta^{n+1}\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \|\delta^{n+1}\|_\infty.$$

On a alors, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \|e^n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^N \|e^{n-1}\|_\infty + \sum_{n=1}^N \|\delta^n\|_\infty,$$

d'où :

$$\|e^N\|_\infty \leq \underbrace{\|e^0\|_\infty}_{=\|\delta^0\|_\infty} + \sum_{n=1}^N \|\delta^n\|_\infty = \sum_{n=0}^N \|\delta^n\|_\infty,$$

donc le schéma est stable.

On va montrer que la condition $0 < \lambda \leq 1$, suffisante pour la stabilité, est également nécessaire : le schéma décentré à gauche est instable si $\lambda > 1$. En effet, considérons un cas où une seule erreur est commise sur l'initialisation. On note $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$e_{j_0}^0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall j \neq j_0, e_j^0 = 0,$$

de sorte que $\|e^0\|_\infty = |e_{j_0}^0|$. Continuons dans les hypothèses utopiques en supposant qu'aucune erreur n'est commise en passant au rang suivant :

$$\delta^1 \equiv 0.$$

On obtient alors :

$$e_{j_0}^1 = (1 - \lambda)e_{j_0}^0 + \lambda \underbrace{e_{j_0-1}^0}_{=0} + \underbrace{\delta_{j_0}^1}_{=0} = (1 - \lambda)e_{j_0}^0 \neq 0,$$

donc l'erreur se propage au rang suivant. D'autre part :

$$e_{j_0+1}^1 = (1 - \lambda) \underbrace{e_{j_0+1}^0}_{=0} + \lambda e_{j_0}^0 + \underbrace{\delta_{j_0+1}^1}_{=0} = \lambda e_{j_0}^0 \neq 0,$$

donc l'erreur se diffuse également. Pire encore :

$$\|e^1\|_\infty \geq |e_{j_0+1}^1| = \lambda |e_{j_0}^0| = \lambda \|e^0\|_\infty > \|e^0\|_\infty$$

car $\lambda > 1$. Ainsi l'erreur n'est pas seulement propagée, elle est également amplifiée, et ce même si aucune autre erreur n'est commise. L'amplification et la diffusion auront lieu à toutes les étapes : même si l'erreur de départ est très petite, elle finira par se voir beaucoup, et partout !

2.1.4 Convergence

Si l'analyse de l'erreur de consistance nous a permis de vérifier que les opérateurs mis en jeu étaient bien approchés par le schéma, il reste à vérifier que ce dernier permet bien de réaliser ce que l'on souhaite : approcher la solution de l'équation de transport. Autrement dit, on cherche à déterminer si :

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} |u_j^n - u(t^n, x_j)| = 0.$$

Reprenons nos développements de Taylor :

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(\tau^n, x_j), \quad \text{avec } \tau^n \in]t^n, t^{n+1}[,$$

et :

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, \xi_j), \quad \text{avec } \xi_j \in]x_{j-1}, x_j[.$$

En particulier :

$$\lambda u(t^n, x_{j-1}) = \lambda u(t^n, x_j) - c \Delta t \partial_x u(t^n, x_j) + c \frac{\Delta t \Delta x}{2} \partial_x^2 u(t^n, \xi_j), \quad \text{avec } \xi_j \in]x_{j-1}, x_j[.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \delta_j^{n+1} &= u(t^{n+1}, x_j) - ((1 - \lambda)u(t^n, x_j) + \lambda u(t^n, x_{j-1})) \\ &= \Delta t \left(\underbrace{\partial_t u(t^n, x_j) + c \partial_x u(t^n, x_j)}_{=0} \right) + \Delta t \left(\frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + c \frac{\Delta x}{2} \partial_x u(t^n, x_j) \right) \\ &= \Delta t R_j^n(\Delta t, \Delta x). \end{aligned}$$

De l'analyse de l'erreur de consistance, on tire alors :

$$|\delta_j^{n+1}| = \Delta t |R_j^n(\Delta t, \Delta x)| \leq \Delta t \frac{M}{2} (\Delta t + c \Delta x).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $T := N \Delta t$. Supposons $\delta^0 \equiv 0$. Alors, si $0 < \lambda \leq 1$, les résultats de stabilité impliquent :

$$\|u^N - u(t^N, \cdot)\|_\infty \leq \sum_{n=1}^N \|\delta^n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^N \Delta t \frac{M}{2} (\Delta t + c \Delta x) = \underbrace{N \Delta t}_{=T} \frac{M}{2} (\Delta t + c \Delta x).$$

2.2 Schéma décentré à droite

On choisit cette fois-ci les approximations suivantes :

$$\partial_t u(t^n, x_j) \approx \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \partial_x u(t^n, x_j) \approx \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_j)}{\Delta x}.$$

On obtient le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0.$$

C'est encore une fois un schéma explicite en temps :

$$u_j^{n+1} = (1 + \lambda) u_j^n - \lambda u_{j+1}^n.$$

On montre que ce schéma est bien consistant en définissant

$$R_j^n(\Delta t, \Delta x) := \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + c \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_j)}{\Delta x},$$

que l'on contrôle à l'aide de développements de Taylor. Cependant, on peut également montrer que ce schéma est inconditionnellement instable. Considérons en effet un cas où une seule erreur est commise pendant l'initialisation : soit $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$e_{j_0}^0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall j \neq j_0, e_j^0 = 0.$$

En supposant de plus $\delta^1 \equiv 0$, on trouve :

$$e_{j_0}^1 = (1 + \lambda)e_{j_0}^0 - \underbrace{\lambda e_{j_0+1}^0}_{=0} + \underbrace{\delta_{j_0}^1}_{=0} = (1 + \lambda)e_{j_0}^0.$$

Ainsi :

$$\|e^1\|_\infty \geq |e_{j_0}^1| = (1 + \lambda)|e_{j_0}^0| = (1 + \lambda)\|e^0\|_\infty > \|e^0\|_\infty$$

car $\lambda > 0$.

Remarque 2.2.1. Comme $c > 0$, on attend un transport de la gauche vers la droite. Dans ce contexte, le schéma décentré à gauche est également appelé schéma décentré amont et est (conditionnellement) stable. Le schéma décentré à droite est quant à lui appelé schéma décentré aval et est toujours instable. Dans le cas où $c < 0$, tout est inversé.

2.3 Schéma explicite centré

Essayons d'aller chercher l'information des deux côtés :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

On obtient ici :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

L'analyse de l'erreur de consistance

$$R_j^n(\Delta t, \Delta x) := \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + c \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_{j-1})}{2\Delta x}$$

permet de montrer que le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace. On peut cependant montrer qu'il n'est pas stable. Considérons pour cela $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$e_{j_0}^0, e_{j_0+1}^0, e_{j_0-1}^0 > 0, \quad e_{j_0+1}^0 < e_{j_0-1}^0, \quad \|e^0\|_\infty = e_{j_0}^0.$$

En supposant $\delta^1 \equiv 0$, on obtient :

$$e_{j_0}^1 = e_{j_0}^0 - \frac{\lambda}{2} \underbrace{(e_{j_0+1}^0 - e_{j_0-1}^0)}_{<0} > e_{j_0}^0 = \|e^0\|_\infty,$$

donc $\|e^1\|_\infty \geq |e_{j_0}^1| > \|e^0\|_\infty$: le schéma est toujours instable.

2.4 Cas pratique : en domaine borné

En pratique, on ne peut pas résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tout entier : il faut fixer un domaine d'intérêt, borné. Restreindre le domaine temporel n'est pas très difficile : comme on passe du temps t^n au temps t^{n+1} , il suffit d'arrêter au bout d'un certain nombre d'itérations, jusqu'à atteindre un certain temps final $T > 0$. La difficulté réside dans la restriction du domaine spatial : pour que le problème soit bien posé, des conditions de bord doivent être imposées, et toute la problématique est de choisir lesquelles.

2.4.1 Conditions de Dirichlet

Soient $a < b$. Supposons que u_0 soit à support compact dans $]a, b[$. Si T est suffisamment petit, alors u sera également à support compact dans ce même intervalle. Le choix naturel consiste alors à choisir des conditions de Dirichlet homogènes : on impose que la solution soit nulle sur le bord du domaine spatial. On souhaite alors résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in]0, T[\times]a, b[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour } x \in [a, b], \\ u(t, a) = u(t, b) = 0, & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

On commence par discrétiser le domaine spatial en se donnant $J \in \mathbb{N}^*$ et en définissant $\Delta x := \frac{b-a}{J}$. La discrétisation de $[a, b]$ est alors donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 0, J \rrbracket, \quad x_j := a + j\Delta x,$$

de sorte que $x_0 = a$ et $x_J = b$. La discrétisation du domaine spatial permet ainsi d'avoir accès à Δx , ce qui permet de définir Δt en ayant fixé auparavant la valeur souhaitée pour la condition CFL :

$$\Delta t := \lambda \frac{\Delta x}{c}.$$

On obtient ainsi la discrétisation du domaine temporel :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n := n\Delta t,$$

où $N := \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$. On cherche alors une approximation u_j^n de $u(t^n, x_j)$. On considère pour cela le schéma explicite décentré à gauche :

$$u_j^{n+1} = (1 - \lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n, \quad j \in \llbracket 1, J-1 \rrbracket.$$

Pour prendre en compte les conditions de bord, on écrit ce schéma pour $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = (1 - \lambda)u_1^n + \lambda u_0^n.$$

Comme on souhaite avoir $u_0^n \approx u(t^n, x_0) = u(t^n, a) = 0$, il est naturel de fixer $u_0^n = 0$, d'où :

$$u_j^{n+1} = (1 - \lambda)u_j^n.$$

On obtient alors l'[Algorithme 2.4.1](#).

Algorithme 2.4.1 : Une implémentation du schéma explicité décentré

```

pour  $j$  de 1 à  $J - 1$ 
   $u_j^0 := u_0(x_j)$ 
pour  $n$  de 0 à  $N - 1$ 
   $u_1^{n+1} := (1 - \lambda)u_1^n$ 
  pour  $j$  de 2 à  $J - 1$ 
     $u_j^{n+1} := (1 - \lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n$ 

```

Remarque 2.4.2. On ne se préoccupe pas ici des valeurs en a et b : il suffit de fixer $u_0^n = u_J^n = 0$.

Une autre approche consiste à adopter un point de vue vectoriel et ainsi à voir le passage de n à $n + 1$ via un produit matrice-vecteur. On définit pour cela :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad U^n := (u_j^n)_{j=1}^{J-1} \in \mathbb{R}^{J-1}.$$

L'initialisation par u_0 se fait toujours de la même façon. On souhaite cependant trouver une matrice $A \in M_{J-1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket, \quad U^{n+1} = AU^n.$$

Autrement dit, on cherche à avoir :

$$\forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, J - 1 \rrbracket, \quad U_j^{n+1} = (AU^n)_j = \sum_{k=1}^{J-1} A_{jk} U_k^n.$$

Or, pour $j \in \llbracket 2, J - 1 \rrbracket$, on doit avoir :

$$U_j^{n+1} = u_j^{n+1} = (1 - \lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n = (1 - \lambda)U_j^n + \lambda U_{j-1}^n.$$

On choisit donc :

$$A_{jj} = 1 - \lambda, \quad A_{j,j-1} = \lambda, \quad A_{jk} = 0 \text{ pour } k \notin \{j - 1, j\}.$$

Pour $j = 1$, on doit avoir :

$$U_1^{n+1} = u_1^{n+1} = (1 - \lambda)u_1^n = (1 - \lambda)U_1^n,$$

d'où :

$$A_{11} = 1 - \lambda, \quad A_{1k} = 0 \text{ pour } k \neq 1.$$

On a ainsi obtenu une matrice bidiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & & & \\ \lambda & 1 - \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Conditions périodiques

Soit $L > 0$. Supposons que u_0 soit L -périodique. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t, \cdot)$ est elle-même L -périodique. On va alors naturellement restreindre la résolution de l'équation à l'intervalle $[0, L]$. On souhaite alors résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in]0, T[\times]0, L[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour } x \in [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L), & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

On discrétise le domaine spatial en se donnant $J \in \mathbb{N}^*$ et en définissant $\Delta x := \frac{L}{J}$. La discrétisation de $[0, L]$ est alors donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 0, J \rrbracket, \quad x_j := j \Delta x,$$

de sorte que $x_0 = 0$ et $x_J = L$. On en déduit une nouvelle fois Δt via la condition CFL :

$$\Delta t := \lambda \frac{\Delta x}{c}.$$

On obtient ainsi la discrétisation du domaine temporel :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n := n \Delta t,$$

où $N := \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$. On cherche alors une approximation u_j^n de $u(t^n, x_j)$. On considère pour cela le schéma explicite décentré à gauche :

$$u_j^{n+1} = (1 - \lambda) u_j^n + \lambda u_{j-1}^n, \quad j \in \llbracket 1, J - 1 \rrbracket.$$

Comme $u(t, 0) = u(t, L)$, on obtient naturellement $u_0^n = u_J^n$: les valeurs en x_0 et x_J sont les mêmes. Il n'est donc pas nécessaire de calculer les deux, mais il faut cependant en calculer au moins une : inutile de chercher à écrire $u_0^n = u_J^n$ en $j = 1$ et $u_J^n = u_0^n$ en $j = J$! Le schéma est une discrétisation de l'EDP sur $]0, L[$, d'où le fait qu'il soit a priori défini pour $j \in \llbracket 1, J - 1 \rrbracket$. La solution de l'équation étant périodique, l'EDP est cependant valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et en particulier le schéma reste valable en $j = J$:

$$u_J^{n+1} = (1 - \lambda) u_J^n + \lambda u_{J-1}^n,$$

où on peut constater que tout est bien défini. Écrivons alors le schéma en $j = 1$:

$$u_1^{n+1} = (1 - \lambda) u_1^n + \lambda u_0^n.$$

On utilise alors la condition périodique :

$$u_1^{n+1} = (1 - \lambda) u_1^n + \lambda u_J^n.$$

On obtient l'[Algorithme 2.4.3](#).

Une autre solution consiste à stocker la valeur en $j = 0$. On obtient l'[Algorithme 2.4.4](#).

Algorithme 2.4.3 : Une implémentation du schéma explicité décentré avec conditions périodiques

```

pour  $j$  de 1 à  $J$ 
   $u_j^0 := u_0(x_j)$ 
pour  $n$  de 0 à  $N - 1$ 
   $u_1^{n+1} := (1 - \lambda)u_1^n + \lambda u_J^n$ 
  pour  $j$  de 2 à  $J$ 
     $u_j^{n+1} := (1 - \lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n$ 

```

Algorithme 2.4.4 : Une autre implémentation du schéma explicité décentré avec conditions périodiques

```

pour  $j$  de 0 à  $J$ 
   $u_j^0 := u_0(x_j)$ 
pour  $n$  de 0 à  $N - 1$ 
  pour  $j$  de 1 à  $J$ 
     $u_j^{n+1} := (1 - \lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n$ 
   $u_0^{n+1} := u_J^{n+1}$ 

```

2.5 Diffusion et dispersion

2.5.1 Onde plane

On cherche une solution de

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0,$$

avec $c > 0$, sous la forme d'une onde plane :

$$u(t, x) = e^{i(kx + \omega t)}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t u + c \partial_x u = 0 &\iff i\omega u + cik u = 0 \\ &\iff \omega = -ck, \end{aligned}$$

d'où :

$$u(t, x) = e^{i(kx - ckt)} = e^{ik(x - ct)}.$$

Il s'agit d'une onde qui se déplace vers la droite à la vitesse c . En effet, pour $t_1 < t_2$, on trouve :

$$u(t_2, x) = u(t_1, x - \underbrace{c(t_2 - t_1)}_{>0}).$$

Recherchons maintenant une solution de

$$\partial_t u + c\partial_x u - a\partial_x^2 u + b\partial_x^3 u = 0,$$

avec $c > 0$ et $a, b \neq 0$, sous la forme d'une onde plane :

$$u(t, x) = e^{i(kx + \omega t)}.$$

Cette fois, la condition de dispersion s'écrit :

$$\omega = -ck + iak^2 + bk^3,$$

d'où :

$$u(t, x) = e^{ik(x - (c - bk^2)t)} e^{-ak^2 t}.$$

On a donc obtenu une onde qui se déplace à la vitesse $c - bk^2$ (vers la droite ou vers la gauche, selon la valeur de b), dont le module est altéré exponentiellement au cours du temps : si $a > 0$, l'onde est écrasée, si $a < 0$, l'énergie explose.

2.5.2 Équation équivalente

Pour un schéma donné, on peut alors rechercher l'équation équivalente, c'est-à-dire l'équation avec laquelle le schéma sera « plus consistant » qu'avec l'équation de transport. Revenons au schéma décentré à gauche :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}.$$

On considère une solution régulière de l'équation de transport $\partial_t u + c\partial_x u = 0$. On commence par un développement de Taylor en espace :

$$u(t^n, x_{j-1}) = u(t^n, x_j) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

d'où :

$$\frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{\Delta x} = \partial_x u(t^n, x_j) - \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

Continuons avec un développement de Taylor en temps :

$$u(t^{n+1}, x_j) = u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^4),$$

d'où :

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} = \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{6} \partial_t^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Or, $\partial_t u = -c\partial_x u$, d'où l'on déduit $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ et, de même, $\partial_t^3 u = -c^3 \partial_x^3 u$. Ainsi :

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} = \partial_t u(t^n, x_j) + c^2 \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - c^3 \frac{\Delta t^2}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

L'erreur de consistance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + c \frac{u(t^n, x_j) - u(t^n, x_{j-1})}{\Delta x} \\ = \underbrace{\partial_t u(t^n, x_j) + c \partial_x u(t^n, x_j)}_{=0} + a \partial_x^2 u(t^n, x_j) + b \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + \Delta x^3). \end{aligned}$$

avec $a := c^2 \frac{\Delta t}{2} - c \frac{\Delta x}{2}$ et $b := -c^3 \frac{\Delta t^2}{6} + c \frac{\Delta x^2}{6}$. On a ainsi obtenu le facteur de diffusion :

$$a = c \frac{\Delta x}{2} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) = c \frac{\Delta x}{2} (1 - \lambda),$$

et le facteur de dispersion :

$$b = c \frac{\Delta x^2}{6} \left(-c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 1 \right) = c \frac{\Delta x^2}{6} (1 - \lambda^2).$$

L'erreur de consistance est alors dominée par un terme de diffusion : le schéma décentré à gauche est principalement diffusif. On peut noter que, si la condition CFL n'est pas vérifiée, et donc si $\lambda > 1$, alors $a < 0$: la solution numérique va croître exponentiellement, ce qui explique l'instabilité du schéma.

Une analyse du schéma explicite centré mène à un résultat similaire. En cherchant à « corriger » ce comportement pour annuler le coefficient de diffusion, on obtient le schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - c^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Cette fois-ci, le terme dominant est un terme de dispersion donné par :

$$c \frac{\Delta x^2}{6} (1 - \lambda^2).$$