
Notes de cours

Approximation de racines

Jérémy Heleine

Agrégation externe de mathématiques

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Dernière mise à jour : 11 novembre 2024

Pour toute question ou remarque : jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Le cas unidimensionnel	2
1.1 La méthode de dichotomie	2
1.2 La méthode de Newton	4
1.3 La méthode de la sécante	6
2 Point fixe	10
2.1 Applications contractantes	10
2.2 Fonctions réelles	12
2.3 Recherche de racines réelles	15
2.4 Dimension quelconque	16
2.5 La méthode de Newton-Raphson	18
Références	ii

Introduction

La résolution d'équations est au cœur de nombreux problèmes. On s'intéresse ici au cas général où le problème a été réécrit sous la forme

$$f(x) = 0$$

avec f une certaine fonction (continue), définie sur un certain espace. Ainsi, on est ramenés à la recherche de zéros d'une fonction, pour laquelle il n'existe bien sûr pas de solution analytique générique, valable dans tous les cas, tant la diversité de problèmes différents est grande. Nous allons nous intéresser ici à des méthodes numériques permettant d'approcher ces zéros.

Il est à noter que nous ne nous intéresserons pas à une autre question, intimement liée puisque sa réponse est nécessaire à la recherche de zéros : celle de l'existence de tels zéros. Celle-ci sera donc admise, pour nous concentrer uniquement sur l'approximation de ces points. L'unicité du zéro d'une fonction est un autre point qui ne sera pas traité. Lorsque l'on recherche un zéro, savoir qu'il est unique peut faciliter les choses, mais c'est une hypothèse qui n'est pas toujours nécessaire.

Ce cours s'appuie essentiellement sur les références que sont [\[Dem06\]](#) et [\[QSG10\]](#).

Chapitre 1

Le cas unidimensionnel

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $I := [a, b]$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$. L'objectif de ce chapitre est de décrire quelques méthodes permettant d'approcher numériquement ce zéro.

1.1 La méthode de dichotomie

On suppose $f(a)f(b) < 0$. La méthode de dichotomie vise à approcher α en le recherchant dans un intervalle de plus en plus petit à chaque étape. Plus précisément, on coupe l'intervalle en deux et on choisit le prochain intervalle de recherche comme étant l'une ou l'autre moitié, selon où est situé le zéro. La méthode est décrite dans l'[Algorithme 1.1.1](#) et illustrée par la [Figure 1.1](#) sur une fonction quelconque.

Algorithme 1.1.1 : Méthode de dichotomie

Entrée : $a < b$ et f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$

$(a_0, b_0) := (a, b)$

$x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$

pour $n \in \mathbb{N}$

si $f(x_n) = 0$

 | Arrêt : $\alpha = x_n$

sinon si $f(a_n)f(x_n) < 0$

 | $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n, x_n)$

sinon

 | $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (x_n, b_n)$

$x_{n+1} := \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$

Remarque 1.1.2. Sous l'hypothèse $f(a)f(b) < 0$, comme f est continue, l'existence de α est donnée par le théorème des valeurs intermédiaires. Il n'est cependant pas

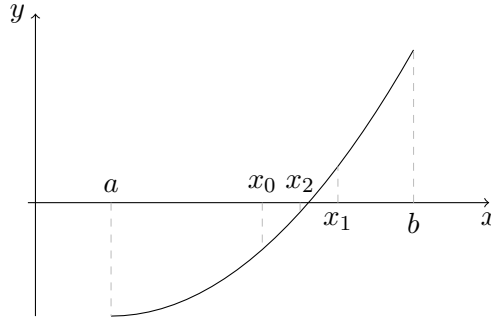


FIGURE 1.1 – Quelques itérations de la méthode de dichotomie.

vrai en général que ce zéro est unique. Dans le cas où f admet plusieurs racines dans l'intervalle $[a, b]$, la méthode de dichotomie approchera l'une d'elles, le « choix » étant conditionné par l'intervalle $[a, b]$, la position des racines dans cet intervalle, mais aussi leur comportement (selon si la fonction change de signe ou non).

Théorème 1.1.3. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par l'[Algorithme 1.1.1](#) converge :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha.$$

De plus, le contrôle de l'erreur est divisé par deux à chaque étape :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| < \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Démonstration. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n) < 0$, donc $\alpha \in]a_n, b_n[$. Deux cas sont possibles :

1. soit $\alpha \in]a_n, x_n[$, dans ce cas $x_n - \alpha < x_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$;
2. soit $\alpha \in]x_n, b_n[$, dans ce cas $\alpha - x_n < b_n - x_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$.

On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| < \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Là encore, on distingue deux cas :

1. soit $\alpha \in]a_n, x_n[$, dans ce cas $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, x_n)$;
2. soit $\alpha \in]x_n, b_n[$, dans ce cas $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (x_n, b_n)$.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2},$$

d'où l'on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

On combine le tout pour obtenir le résultat. ■

Remarque 1.1.4. Ce contrôle explicite de l'erreur permet de prédire le nombre exact d'itérations nécessaire pour que la méthode atteigne une précision donnée $\varepsilon > 0$:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon \iff 2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} \iff n > \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) - 1,$$

et ce, quel que soit le choix de f .

La méthode de dichotomie a l'avantage que chaque itération est peu coûteuse car ne nécessite que l'évaluation de la fonction en un point (le coût exact dépend bien entendu de celui dû à l'évaluation de la fonction). Cependant, sa convergence est lente, d'autant plus qu'il peut arriver qu'une itération nous éloigne (temporairement) de la racine recherchée, ce qui est le cas par exemple si celle-ci est proche du milieu de l'intervalle de départ, comme illustré dans la [Figure 1.2](#).

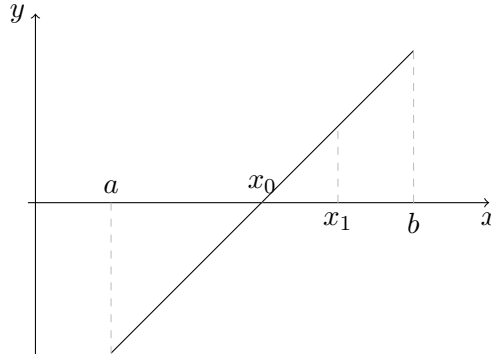


FIGURE 1.2 – Exemple d'un zéro proche du centre de l'intervalle de recherche : $|x_0 - \alpha| = 0.01$, mais $|x_1 - \alpha| = 1.01$!

1.2 La méthode de Newton

Dans le cas où la fonction f est dérivable, on cherche à exploiter cette information pour obtenir une méthode plus rapide. On peut écrire un développement de Taylor de f au point α , pour un certain x proche de α :

$$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + o(|\alpha - x|).$$

Or, $f(\alpha) = 0$. Si x est suffisamment proche de α , on peut alors négliger le terme $o(|\alpha - x|)$ pour obtenir :

$$0 \approx f(x) + (\alpha - x)f'(x),$$

ce qui, si $f'(x) \neq 0$, se réécrit :

$$\alpha \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a en réalité remplacé l'expression de f par celle de sa tangente au point x . L'expression précédente nous dit que, si x est proche de α , alors le zéro de f est proche du zéro de sa tangente. Bien sûr, sauf cas particulier, nous n'obtenons qu'une approximation, mais on peut réitérer le procédé. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un point x_n proche de α . L'équation de la tangente à la courbe de f au point x_n s'écrit :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

On recherche alors le point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses afin de définir x_{n+1} :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n).$$

C'est l'idée de la méthode de Newton décrite dans l'[Algorithme 1.2.1](#) et illustrée dans la [Figure 1.3](#).

Algorithme 1.2.1 : Méthode de Newton

Entrée : $x_0 \in I$, f et f'

pour $n \in \mathbb{N}$

$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

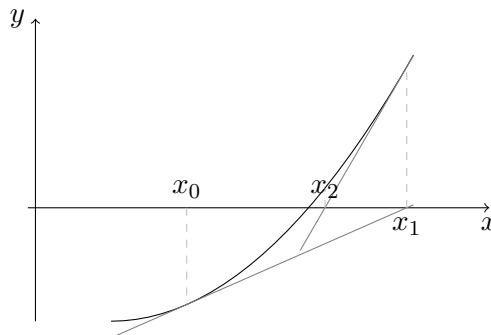


FIGURE 1.3 – Quelques itérations de la méthode de Newton.

Théorème 1.2.2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons que f admette un unique zéro α sur I et que f' ne s'annule pas sur I . Supposons de plus qu'il existe deux constantes $m > 0$ et $M > 0$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M.$$

Alors, pour toute donnée initiale $x_0 \in I$ suffisamment proche de α , la suite définie

par la méthode de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|^{2^n} \left(\frac{M}{2m} \right)^{2^n - 1}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Comme $f(\alpha) = 0$, on peut toujours écrire :

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha + \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Or, f est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet donc un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2}f''(y_n),$$

avec $y_n \in]\min(\alpha, x_n), \max(\alpha, x_n)[$. Autrement dit :

$$\frac{f(\alpha) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha - x_n + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)}.$$

Ainsi :

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)}.$$

En utilisant les hypothèses sur f' et f'' , on trouve alors :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|x_n - \alpha|^2}{2} \frac{M}{m}.$$

Le résultat s'ensuit alors par récurrence. ■

Remarque 1.2.3. Si on ne dispose d'aucune information nous permettant même de nous approcher du zéro de f , la méthode de Newton peut ne pas converger si la donnée initiale est trop éloignée de la racine. Dans la pratique, il peut donc être judicieux de démarrer avec quelques itérations de la méthode de dichotomie, de manière à restreindre l'intervalle de recherche et ainsi initialiser la méthode de Newton correctement.

1.3 La méthode de la sécante

La méthode de Newton est rapide en terme de nombre d'itérations, mais elle nécessite l'évaluation de la dérivée de la fonction à chaque itération, ce qui peut s'avérer très coûteux, voire impossible si on ne dispose pas de cette information. Pour approcher les performances

de la méthode de Newton sans faire appel à la dérivée de la fonction, on peut s'intéresser à la méthode de la sécante.

L'idée consiste toujours à remplacer la courbe de f par une droite. Au lieu de considérer la tangente à la courbe en un point, on considère la corde définie par deux points. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'on ait déjà défini deux points x_{n-1} et x_n . L'équation de la corde reliant ces points est

$$y = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x - x_n) + f(x_n).$$

On définit alors x_{n+1} par l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses :

$$0 = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$

ce qui donne la suite définie dans l'Algorithme 1.3.1. La méthode est illustrée dans la Figure 1.4.

Algorithme 1.3.1 : Méthode de la sécante

Entrée : $f, (x_0, x_1) \in I^2$

pour $n \in \mathbb{N}^*$

$x_{n+1} := x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

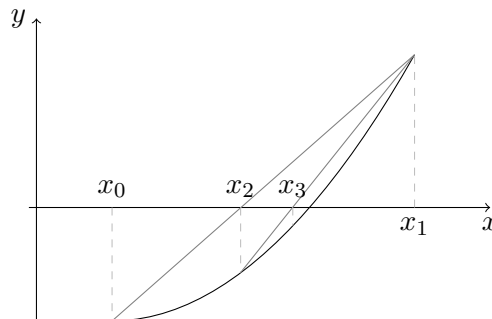


FIGURE 1.4 – Quelques itérations de la méthode de la sécante.

Théorème 1.3.2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite α telle que $f'(\alpha) \neq 0$, alors nécessairement

$$f(\alpha) = 0.$$

Démonstration. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$, on en déduit directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \alpha$. Par ailleurs, f étant continue, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\alpha)$. Enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Par définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par unicité de la limite, on obtient :

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

d'où le résultat. ■

Théorème 1.3.3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons que f admette un unique zéro α sur I et que $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) \neq 0$. Supposons de plus qu'il existe deux constantes $m > 0$ et $M > 0$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M.$$

Alors, pour toute donnée initiale $x_0 \in I$ suffisamment proche de α , si la suite définie par la méthode de la sécante converge, alors elle converge vers α avec une vitesse superlinéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq \max(|x_0 - \alpha|, |x_1 - \alpha|)^{u_n} \left(\frac{M}{2m} \right)^{u_n - 1},$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \alpha \\ &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \alpha \\ &= \frac{(x_{n-1} - \alpha)f(x_n) - (x_n - \alpha)f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{\frac{f(x_n)}{x_n - \alpha} - \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - \alpha}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Rappelons que $f(\alpha) = 0$, donc on peut toujours écrire :

$$\frac{f(x_n)}{x_n - \alpha} = \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} = f[\alpha, x_n], \quad \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - \alpha} = \frac{f(x_{n-1}) - f(\alpha)}{x_{n-1} - \alpha} = f[\alpha, x_{n-1}].$$

Continuons notre petite transformation :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - \alpha &= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[\alpha, x_n] - f[\alpha, x_{n-1}]}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
 &= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[\alpha, x_n] - f[\alpha, x_{n-1}]}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x_n - x_{n-1})} \\
 &= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{\frac{f[\alpha, x_n] - f[\alpha, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \\
 &= (x_n - \alpha)(x_{n-1} - \alpha) \frac{f[x_{n-1}, \alpha, x_n]}{f[x_n, x_{n-1}]}.
 \end{aligned}$$

On utilise les propriétés des différences divisées : on trouve y_n et z_n dans l'intervalle $]\min(\alpha, x_{n-1}, x_n), \max(\alpha, x_{n-1}, x_n)[$ tels que

$$f[x_n, x_{n-1}] = y_n, \quad f[x_{n-1}, \alpha, x_n] = \frac{f''(z_n)}{2}.$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n := x_n - \alpha,$$

on a donc obtenu :

$$e_{n+1} = e_n e_{n-1} \frac{f''(z_n)}{2f'(y_n)}.$$

On conclut alors en utilisant les hypothèses sur f'' et f' , et en faisant une petite récurrence. ■

Chapitre 2

Point fixe

Les méthodes décrites dans le chapitre précédent s'appuient sur le fait que la fonction partait de $\mathbb{R}$ et arrivait également dans $\mathbb{R}$. Elles ne peuvent donc pas s'adapter directement à des fonctions définies sur des espaces de dimension supérieure. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la méthode du point fixe qui a le bon goût de ne pas avoir ce défaut : elle est utilisable aussi bien en toute dimension. On va donc travailler dans (E, d) un espace métrique complet.

2.1 Applications contractantes

Définition 2.1.1. Soit $g: E \rightarrow E$ continue. On dit que $a \in E$ est un point fixe de g si

$$g(a) = a.$$

L'existence d'un point fixe n'est bien sûr pas garantie en général : ce n'est pas parce qu'une application arrive dans son espace de départ qu'elle admet un point fixe (penser par exemple à la simple fonction affine, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$). Nous allons cependant voir qu'il existe une certaine classe d'applications qui nous assure l'existence de tels points : les applications contractantes.

Définition 2.1.2. Soit $g: E \rightarrow E$ continue. On dit que g est contractante s'il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(g(x), g(y)) \leq kd(x, y).$$

Dans ce cas, on dira parfois que g est k -contractante, ou contractante de rapport k .

Théorème 2.1.3. Soit $g: E \rightarrow E$ une application k -contractante, $k \in]0, 1[$. Alors g admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour toute donnée initiale $x_0 \in E$, la

suite définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

converge vers a à vitesse exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, a) \leq k^n d(x_0, a).$$

Démonstration. Existence. Soit $x_0 \in E$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n).$$

Comme g est k -contractante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d(x_n, x_{n+1}) = d(g(x_{n-1}), g(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n),$$

d'où par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

On en déduit que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq \sum_{p=n}^{m-1} d(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq \sum_{p=n}^{m-1} k^p d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{p=n}^{m-1} k^p \\ &= d(x_0, x_1) \frac{k^n - k^m}{1 - k} \\ &\leq d(x_0, x_1) \frac{k^n}{1 - k}. \end{aligned}$$

Comme $k \in]0, 1[$, on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge puisque E est complet. Soit $a \in E$ sa limite. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(a),$$

par continuité de g . Par unicité de la limite, on a donc obtenu :

$$a = g(a),$$

ce qui montre bien l'existence d'un point fixe de g vers lequel converge la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(x_{n+1}, a) = d(g(x_n), g(a)) \leq kd(x_n, a)$$

puisque g est k -contractante et admet a pour point fixe. On en déduit la vitesse de convergence par récurrence.

Unicité. Soit $(a, b) \in E^2$ tel que $g(a) = a$ et $g(b) = b$. En particulier, on a alors :

$$d(a, b) = d(g(a), g(b)) \leq kd(a, b).$$

Si $d(a, b) > 0$, alors nécessairement $k \geq 1$. Comme $k < 1$, on en déduit donc que $d(a, b) = 0$, donc $a = b$. ■

Corollaire 2.1.4. Soit $g: E \rightarrow E$ continue. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$g^m := \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{m \text{ fois}}$$

est contractante. Alors les conclusions du [Théorème 2.1.3](#) restent valables (sauf pour la vitesse de convergence qui est à adapter).

Démonstration. Soit $k \in]0, 1[$ tel que g^m est k -contractante. Par application du [Théorème 2.1.3](#), g^m admet donc un unique point fixe $a \in E$. Alors :

$$g^m(g(a)) = g^{m+1}(a) = g(g^m(a)) = g(a),$$

car $a = g^m(a)$. Ainsi, $g(a)$ est un point fixe de g^m . Par unicité de ce point fixe, on en déduit $g(a) = a$ et ainsi a est un point fixe de g . Par ailleurs, tout point fixe de g est également un point fixe de g^m . Comme g^m n'admet qu'un seul point fixe, on en déduit que a est l'unique point fixe de g .

Soit maintenant $x_0 \in E$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$x_{mn} = g^{mn}(x_0) = (g^m)^n(x_0).$$

On reconnaît la suite des itérés de point fixe de g^m . Autrement dit, toute sous-suite $(x_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . Soit $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{mn+r} = g^{mn+r}(x_0) = g^r(x_{mn})$$

qui converge vers $g^r(a)$ par continuité de g . Or, $g^r(a) = a$. On a donc montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . ■

2.2 Fonctions réelles

Il n'est pas toujours facile de déterminer si une application est contractante ou non. Le résultat suivant, simple conséquence de l'inégalité des accroissements finis, donne un critère suffisant utile en pratique.

Proposition 2.2.1. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Si il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que

$$\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k,$$

alors g est k -contractante.

On peut utiliser ce résultat pour déterminer à quelle catégorie appartient un point fixe, au sens de la définition suivante.

Définition 2.2.2. Soit g une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles, admettant un point fixe $a \in I$. On dit que a est un point fixe attractif s'il existe un voisinage J de a tel que :

$$\forall x \in J, \quad |g(x) - a| < |x - a|.$$

On dit que a est un point fixe répulsif s'il existe un voisinage J de a tel que :

$$\forall x \in J \setminus \{a\}, \quad |g(x) - a| > |x - a|.$$

Proposition 2.2.3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles, admettant un point fixe $a \in I$. Si $|g'(a)| < 1$, alors a est un point fixe attractif. Si $|g'(a)| > 1$, alors a est un point fixe répulsif.

Démonstration. Cas attractif. Supposons $|g'(a)| < 1$. Soit $k \in]|g'(a)|, 1[$. Par continuité de g' , il existe $h > 0$ tel que

$$\forall x \in J :=]a - h, a + h[, \quad |g'(x)| \leq k,$$

donc g est k -contractante sur J . Pour tout $x \in J$, on a alors :

$$|g(x) - a| = |g(x) - g(a)| \leq k|x - a|,$$

car $g(a) = a$.

Cas répulsif. Supposons $|g'(a)| > 1$. Par définition de $g'(a)$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| = |g'(a)| > 1.$$

On peut donc trouver $h > 0$ tel que, en notant $J :=]a - h, a + h[$:

$$\forall x \in J \setminus \{a\}, \quad \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| > 1,$$

ce qui est bien l'inégalité recherchée. ■

L'attractivité ou la répulsivité d'un point fixe détermine la manière dont va se comporter la suite définie par la méthode de point fixe. En effet, prenons $x_0 \in J$ où J est un voisinage de a et considérons la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si le point fixe a est attractif, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - a| = |g(x_n) - a| < |x_n - a|$$

et ainsi la suite converge vers a avec une vitesse exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - a| \leq k^n |x_0 - a|$$

avec $k \in]0, 1[$. Si, au contraire, le point fixe est répulsif, alors la suite n'a aucune chance de se rapprocher de a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - a| = |g(x_n) - a| > |x_n - a|.$$

Cependant, si g est $\mathcal{C}^1$ avec $|g'(a)| > 1$, on peut définir une autre suite qui, elle, convergera vers a . En effet, comme $|g'(a)| > 1$, il existe un voisinage J de a sur lequel g' est de signe constant. Autrement dit, g est strictement monotone sur J et admet donc une réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $g(J)$. Or :

$$g(a) = a \iff a = g^{-1}(a),$$

donc a est également un point fixe de g^{-1} . De plus :

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))} = \frac{1}{g'(a)}.$$

Comme $|g'(a)| > 1$, on en déduit alors que $|(g^{-1})'(a)| < 1$: a est un point fixe attractif pour g^{-1} et appliquer la méthode de point fixe à g^{-1} définira alors une suite convergente.

Remarque 2.2.4. Il est naturel de se demander ce qu'il se passe dans le cas où $|g'(a)| = 1$. Dans ce cas, on ne peut tout simplement pas conclure d'un point de vue général : selon les cas, la suite peut converger ou diverger. Dans les deux exemples ci-dessous, g admet 0 pour point fixe et $g'(0) = 1$ dans les deux cas :

- $g: [0, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin x$ définit une suite convergente, de limite 0 ;
- $g: [0, +\infty[\ni x \mapsto \sinh x$ définit une suite divergente (si $x_0 \neq 0$).

On peut remarquer un cas particulier de $|g'(a)| < 1$: le cas où $g'(a) = 0$. En effet, supposons de plus que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et que sa dérivée seconde est bornée par une certaine constante $M > 0$. On peut écrire un développement de Taylor de g au voisinage de a :

$$\forall x \in J, \quad g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}g''(c),$$

où $c \in]\min(a, x), \max(a, x)[$. On utilise alors $g(a) = a$, $g'(a) = 0$ et le fait que g'' soit bornée pour avoir :

$$\forall x \in J, \quad |g(x) - a| \leq (x - a)^2 \frac{M}{2}.$$

Une petite récurrence permet alors de montrer une convergence quadratique de la suite définie par la méthode de point fixe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - a| \leq (x_0 - a)^{2^n} \left(\frac{M}{2} \right)^{2^n - 1}.$$

On parle dans ce cas de point fixe superattractif.

2.3 Recherche de racines réelles

Reprenons l'objectif du cours : approcher la racine d'une fonction. On reste pour le moment dans le cas réel. Soit donc f une fonction continue sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles, admettant un unique zéro $a \in I$. On définit

$$g: x \mapsto x - Cf(x)$$

avec $C \neq 0$ constante. De manière immédiate, on a alors :

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x$$

et ainsi les zéros de f sont les points fixes de g . On transforme alors le problème de recherche de racines en recherche de points fixes.

Supposons de plus que f est dérivable et strictement croissante sur I . On trouve deux constantes $0 < m < M$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

Comme f est dérivable, g l'est également, avec :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = 1 - Cf'(x).$$

Si on considère $C > 0$, alors :

$$\forall x \in I, \quad 1 - CM \leq g'(x) \leq 1 - Cm.$$

On constate alors que, si $C \in]0, \frac{2}{M}[$, alors

$$\forall x \in I, \quad |g'(x)| < 1,$$

et ainsi g est contractante. Prenons par exemple $C = \frac{1}{M}$, de sorte que g est contractante de rapport $k := 1 - \frac{m}{M}$. Appliquer la méthode de point fixe à g permettra donc d'approcher son point fixe, et donc le zéro de f . On notera que la méthode convergera d'autant plus vite que k est proche de zéro. On a donc intérêt à avoir m et M aussi proches que possible.

Exemple 2.3.1. Cherchons à approcher numériquement $\sqrt{2}$. On cherche donc $x = \sqrt{2}$, ce qui peut par exemple se réécrire comme $x^2 - 2 = 0$ sur l'intervalle $I := [1, 2]$. Posons $f: x \mapsto x^2 - 2$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2x,$$

d'où :

$$\forall x \in I, \quad 2 \leq f'(x) \leq 4.$$

On peut alors appliquer la méthode du point fixe avec

$$g: x \mapsto x - \frac{f(x)}{4}.$$

Remarque 2.3.2. On a construit g avec pour objectif de faire en sorte que son point fixe soit attractif. Un autre choix, peut-être plus tentant de prime abord, serait de faire en sorte que ce point fixe soit superattractif pour avoir une convergence quadratique. Avec les mêmes notations, on obtient

$$C = \frac{1}{f'(a)}.$$

Comme a est justement l'inconnue du problème, il est impossible de sélectionner cette constante a priori. Une idée serait de considérer C comme étant une fonction. En particulier, si on choisit $C = \frac{1}{f'}$, alors C sera proche de la valeur optimale $\frac{1}{f'(a)}$ quand x est proche de a : on s'attend à avoir un bon taux de convergence. C'est en réalité une méthode qui a été vue dans le chapitre précédent. En effet, la suite s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

et on reconnaît la méthode de Newton.

2.4 Dimension quelconque

On se place maintenant dans le cas où l'espace est $\mathbb{R}^m$, pour $m \in \mathbb{N}^*$. On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour une norme $\|\cdot\|$ donnée sur $\mathbb{R}^m$, on peut donc associer, de façon continue, à $x \in \Omega$, une application $g'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ telle que :

$$g(x+h) = g(x) + g'(x) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Comme dans le cas de la dimension 1, nous allons nous intéresser au lien entre cette application dérivée et le caractère attractif d'un point fixe. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant, qui relie le caractère lipschitzien d'une application et la norme de sa dérivée.

Lemme 2.4.1. 1. Si g est k -lipschitzienne sur Ω pour une certaine norme $\|\cdot\|$, alors

$$\forall x \in \Omega, \quad \|g'(x)\| \leq k.$$

2. Si Ω est convexe et s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad \|g'(x)\| \leq k,$$

alors g est k -lipschitzienne sur Ω .

Démonstration. Première implication. Soit $x \in \Omega$. Soit $\delta > 0$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\|h\| < r \implies \|\varepsilon(h)\| < \delta.$$

On rappelle :

$$\|g'(x)\| = \sup_{h \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|g'(x)h\|}{\|h\|}.$$

Par linéarité de $g'(x)$, on peut montrer :

$$\|g'(x)\| = \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^m \\ \|h\|=r}} \frac{\|g'(x)h\|}{\|h\|}.$$

Par ailleurs :

$$g'(x)h = g(x+h) - g(x) - \|h\|\varepsilon(h),$$

d'où :

$$\|g'(x)h\| \leq \|g(x+h) - g(x)\| + \|h\|\|\varepsilon(h)\|.$$

En prenant h tel que $\|h\| < r$ et en utilisant le fait que g est k -lipschitzienne, on obtient :

$$\|g'(x)h\| \leq k\|h\| + \|h\|\delta = (k + \delta)\|h\|,$$

d'où :

$$\|g'(x)\| \leq k + \delta,$$

et ce pour n'importe quel $\delta > 0$.

Seconde implication. Soit $(x, y) \in \Omega$. Comme Ω est convexe, par définition :

$$\forall t \in [0, 1], \quad x + t(y - x) \in \Omega,$$

et on peut donc définir

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto g(x + t(y - x)), \end{aligned}$$

dérivable, de dérivée :

$$\varphi'(t) = g'(x + t(y - x))(y - x).$$

Ainsi :

$$g(y) - g(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) \, dt = \int_0^1 g'(x + t(y - x))(y - x) \, dt,$$

et le résultat s'ensuit. ■

Théorème 2.4.2. Soit $a \in \Omega$ un point fixe de g . Alors $\rho(g'(a)) < 1$ si et seulement s'il existe un voisinage fermé V de a stable par g et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^m$ tels que $g|_V$ soit contractante.

Démonstration. Sens direct. Supposons $\rho(g'(a)) < 1$. Il existe donc une norme sur $\mathbb{R}^m$ telle que $\|g'(a)\| < 1$. Or, l'application $a \mapsto g'(a)$ est continue, donc on trouve $r > 0$ tel que

$$\sup_{b \in V} \|g'(b)\| < 1,$$

où V désigne la boule fermée de centre a et de rayon r . On note $k := \sup_{b \in V} \|g'(b)\|$. Comme V est convexe, on peut appliquer le [Lemme 2.4.1](#) pour obtenir que g est k -lipschitzienne sur V . Ceci montre également que V est stable par g :

$$\forall x \in V, \quad \|g(x) - a\| = \|g(x) - g(a)\| \leq k\|x - a\| \leq r$$

car $g(a) = a$ et $k < 1$.

Réciproque. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ pour laquelle $g|_V$ est contractante. Par définition, il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que g est k -lipschitzienne. Par application du [Lemme 2.4.1](#), $\|g'(a)\| \leq k$. Ainsi :

$$\rho(g'(a)) \leq \|g'(a)\| \leq k < 1.$$

■

De façon analogue à la dimension 1, on dira que $a \in \Omega$ est un point fixe attractif s'il « attire » les itérés de la méthode de point fixe, ce qui est le cas si g est k -contractante :

$$\|x_{n+1} - a\| = \|g(x_n) - g(a)\| \leq k\|x_n - a\|,$$

ce qui implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n - a\| \leq k^n \|x_0 - a\|.$$

On peut également noter que, si $g'(a) = 0$, on peut retrouver là encore une convergence quadratique.

2.5 La méthode de Newton-Raphson

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}^m$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme dans le cas de la dimension 1, on peut écrire un développement limité de f :

$$f(\alpha) = f(x) + f'(x) \cdot (\alpha - x) + o(\|\alpha - x\|)$$

pour $x \in \Omega$ suffisamment proche de α . En négligeant le petit o , on a alors l'idée d'itérer. Partant de $x_0 \in \Omega$ proche de α , on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f'(x_n)$ est inversible, le point $x_{n+1} \in \Omega$ est défini par :

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n).$$

C'est la méthode de Newton-Raphson dont on peut montrer, là encore comme en dimension 1, qu'elle converge quadratiquement sous les bonnes conditions.

Théorème 2.5.1. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \Omega$ tel que $f(\alpha) = 0$ et tel que $f'(\alpha)$ soit inversible et $f''(\alpha)$ soit bornée. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n),$$

converge quadratiquement vers α pour $x_0 \in \Omega$ suffisamment proche de α .

Références

- [Dem06] Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.
- [QSG10] Alfio QUARTERONI, Fausto SALERI et Paola GERVASIO. *Calcul scientifique*. Springer, 2010.