
Notes de cours

Équation des ondes

Jérémy Heleine

Agrégation externe de mathématiques

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Dernière mise à jour : 13 décembre 2024

Pour toute question ou remarque : jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [CC BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Étude de l'équation continue	2
1.1 L'équation des ondes 1D	2
1.1.1 Solution générale	2
1.1.2 Problème de Cauchy et formule de d'Alembert	4
1.1.3 Propagation à vitesse finie	6
1.1.4 Stabilité	7
1.1.5 Conservation d'énergie	8
1.1.6 Quelques autres conséquences	9
1.2 L'équation des ondes avec terme source	9
1.2.1 Problème de Cauchy	9
1.2.2 Domaine de dépendance et cône d'influence	11
1.3 L'équation des ondes en domaine borné	12
2 Différences finies	14
2.1 Schéma intérieur	14
2.2 Initialisation	15

Introduction

Une onde peut être résumée comme un transport d'énergie sans transport de matière. Lorsqu'elle se propage, cette énergie peut perturber localement le milieu, allant parfois jusqu'à mettre en mouvement la matière. C'est le cas par exemple d'une onde élastique (séismes), ou encore d'une onde acoustique (qui fait « vibrer » la matière). De par leur nature, de telles ondes ne peuvent se propager dans le vide. D'autres le peuvent, comme les ondes électromagnétiques, que l'on retrouve partout autour de nous : lumière, radio, ou encore réseaux mobiles ne sont que quelques exemples.

Selon la nature de l'onde, la modélisation mathématique de sa propagation ne fera pas intervenir les mêmes quantités. Cependant, ces modèles ont en commun le fait que l'on peut y retrouver, de manière plus ou moins directe, l'équation des ondes :

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f,$$

où c désigne la célérité de l'onde, et f est un terme source.

Chapitre 1

Étude de l'équation continue

1.1 L'équation des ondes 1D

On s'intéresse ici à l'équation des ondes en dimension 1, posée sur $\mathbb{R}$ tout entier. On suppose le milieu homogène et sans terme source. On recherche ainsi $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ telle que :

$$\partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0, \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

avec $c \in \mathbb{R}_*^+$.

1.1.1 Solution générale

Proposition 1.1.1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ solution de (1.1). Alors il existe deux ondes progressives $u^\pm \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u^+(x - ct) + u^-(x + ct).$$

Démonstration. On introduit le changement de variables :

$$s := x + ct, \quad y := x - ct.$$

On écrit alors $u(t, x) = \tilde{u}(s, y)$. Alors :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (\partial_s \tilde{u})(\partial_t s) + (\partial_y \tilde{u})(\partial_t y) = c(\partial_s \tilde{u}) - c(\partial_y \tilde{u}), \\ \partial_x u &= (\partial_s \tilde{u})(\partial_x s) + (\partial_y \tilde{u})(\partial_x y) = \partial_s \tilde{u} + \partial_y \tilde{u}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= c(\partial_s^2 \tilde{u})(\partial_t s) + c(\partial_{ys} \tilde{u})(\partial_t y) - c(\partial_{sy} \tilde{u})(\partial_t s) - c(\partial_y^2 \tilde{u})(\partial_t y) \\ &= c^2 \partial_s^2 \tilde{u} - 2c^2 \partial_{sy} \tilde{u} + c^2 \partial_y^2 \tilde{u}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= (\partial_s^2 \tilde{u})(\partial_x s) + (\partial_{ys} \tilde{u})(\partial_x y) + (\partial_{sy} \tilde{u})(\partial_x s) + (\partial_y^2 \tilde{u})(\partial_x y) \\ &= \partial_s^2 \tilde{u} + 2\partial_{sy} \tilde{u} + \partial_y^2 \tilde{u}. \end{aligned}$$

Comme u est solution de (1.1), on a :

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0,$$

ce qui se traduit par :

$$c^2 \partial_s^2 \tilde{u} - 2c^2 \partial_{sy} \tilde{u} + c^2 \partial_y^2 \tilde{u} - c^2 \partial_s^2 \tilde{u} - 2c^2 \partial_{sy} \tilde{u} - c^2 \partial_y^2 \tilde{u} = 0.$$

Après simplification, il ne reste que :

$$\partial_{sy} \tilde{u} = 0.$$

Autrement dit :

$$\partial_s (\partial_y \tilde{u}) = 0,$$

d'où l'on déduit l'existence d'une fonction f indépendante de s telle que :

$$\partial_y \tilde{u}(s, y) = f(y).$$

En posant u^+ une primitive de f , on trouve u^- indépendante de y telle que :

$$\tilde{u}(s, y) = u^+(y) + u^-(s).$$

En revenant à la définition de $\tilde{u}$, s et y , on a donc obtenu :

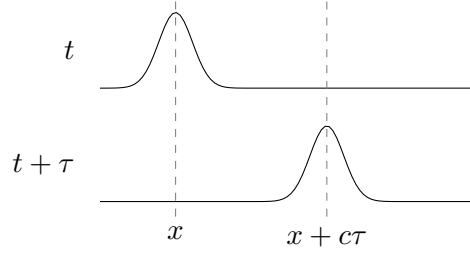
$$\begin{aligned} u(t, x) &= \tilde{u}(s, y) \\ &= u^+(y) + u^-(s) \\ &= u^+(x - ct) + u^-(x + ct). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.2. On parle d'ondes progressives pour désigner u^+ et u^- . On peut en effet remarquer que u^+ « se déplace vers la droite » tandis que u^- « se déplace vers la gauche ». Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Soit $\tau > 0$. Alors :

$$u^+((x + c\tau) - c(t + \tau)) = u^+(x + c\tau - ct - c\tau) = u^+(x - ct).$$

Ainsi, à l'instant $t + \tau$, c'est le point $x + c\tau$, à droite de x , qui est perturbé de la même façon que le point x l'était à l'instant t . Une illustration est donnée dans la [Figure 1.1](#).

FIGURE 1.1 – Exemple d'onde progressive u^+ .

1.1.2 Problème de Cauchy et formule de d'Alembert

Il est possible de factoriser l'opérateur intervenant dans l'équation des ondes :

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u &= (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u \\ &= (\partial_t - c \partial_x) \underbrace{(\partial_t + c \partial_x)u}_v, \end{aligned}$$

donc :

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_t v - c \partial_x v = 0, \\ \partial_t u + c \partial_x u = v. \end{cases}$$

On reconnaît alors un système de deux équations de transport.

Lemme 1.1.3 (Formule de Duhamel). Le problème de Cauchy défini par l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = v(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u_0(x - ct) + \int_0^t v(s, x - c(t - s)) \, ds.$$

Démonstration. On définit $X : t \mapsto X(t)$ la caractéristique : $X'(t) = c$ et $X(0) = x_0$. Alors :

$$\partial_t u(t, X(t)) + X'(t) \partial_x u(t, X(t)) = v(t, X(t)),$$

ce qui se réécrit :

$$\frac{d}{dt}(u(t, X(t))) = v(t, X(t)).$$

Écrivons alors :

$$u(t, X(t)) - u(0, X(0)) = \int_0^t v(s, X(s)) \, ds,$$

d'où :

$$u(t, X(t)) = u_0(X(0)) + \int_0^t v(s, X(s)) \, ds.$$

Comme $X(t) = ct + x_0$, on trouve, en posant $x = X(t)$:

$$x_0 = x - ct,$$

donc $X(t) = x$, $X(0) = x - ct$, $X(s) = cs + x - ct = x - c(t - s)$. On a ainsi obtenu :

$$u(t, x) = u_0(x - ct) + \int_0^t v(s, x - c(t - s)) \, ds.$$

■

On complète la définition du problème qui nous intéresse en ajoutant des conditions initiales à l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Théorème 1.1.4. Supposons $(u_0, u_1) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors le problème (1.2) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donnée par la formule de d'Alembert :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) \, dy.$$

Démonstration. On peut vérifier que la formule donnée définit bien une solution du problème (1.2) : on a donc existence. Pour l'unicité, on va vérifier que toute solution de (1.2) est de la forme annoncée. Soit pour cela $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ solution du problème (1.2). On pose $v := \partial_t u + c \partial_x u$. On a donc :

$$\partial_t v - c \partial_x v = 0,$$

qui est une équation de transport que nous savons résoudre, connaissant la condition initiale. Or :

$$v(0, \cdot) = \partial_t u(0, \cdot) + c \partial_x u(0, \cdot) = u_1 + cu'_0.$$

Ainsi :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad v(t, x) = v(0, x + ct) = u_1(x + ct) + cu'_0(x + ct).$$

On détermine alors u par la formule de Duhamel. Puisque l'on a :

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = v, \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{cases}$$

on a, pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x - ct) + \int_0^t v(s, x - c(t - s)) \, ds \\ &= u_0(x - ct) + \int_0^t (u_1(x - c(t - s) + cs) + cu'_0(x - c(t - s) + cs)) \, ds \\ &= u_0(x - ct) + \int_0^t (u_1(x - ct + 2cs) + cu'_0(x - ct + 2cs)) \, ds. \end{aligned}$$

On introduit le changement de variable :

$$y := x - ct + 2cs,$$

d'où, pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x - ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} (u_1(y) + cu'_0(y)) \frac{1}{2c} \, dy \\ &= u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) \, dy + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u'_0(y) \, dy \\ &= u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) \, dy + \frac{1}{2} (u_0(x + ct) - u_0(x - ct)) \\ &= \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) \, dy. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.5. On peut déduire de la formule de d'Alembert les expressions des ondes progressives $u^\pm$ mentionnées plus tôt :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad u^\pm(z) = \frac{1}{2} u_0(z) \mp \frac{1}{2c} \int_0^z u_1(y) \, dy.$$

1.1.3 Propagation à vitesse finie

Une conséquence directe de la formule de d'Alembert est la propagation de l'information à vitesse finie, qui peut être formalisée par le résultat suivant.

Proposition 1.1.6. Supposons u_0 et u_1 à supports compacts. Soient $a < b$ tels que

$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset [a, b]$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{supp } u(t, \cdot) \subset [a - ct, b + ct].$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > b + ct$. Alors $x - ct > b$ et ainsi $u_0(x - ct) = 0$. Comme $c > 0$ et $t \geq 0$, on a également $x + ct > b + 2ct > b$, donc $u_0(x + ct) = 0$. On a également $[x - ct, x + ct] \subset [b, +\infty[$, donc $\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy = 0$. On a donc obtenu $u(t, x) = 0$, donc $\text{supp } u(t, \cdot) \subset]-\infty, b + ct]$.

En considérant $x < a - ct$, on montre de la même façon que $u(t, x) = 0$, donc $\text{supp } u(t, \cdot) \subset [a - ct, b + ct]$. ■

Autrement dit, considérons un point $x \in \mathbb{R}$ à un instant $t \in \mathbb{R}^+$, avec u_0 et u_1 à supports compacts, contenus dans un intervalle $[a, b]$. Comme $\text{supp } u(t, \cdot) \subset [a - ct, b + ct]$, pour que $u(t, x) \neq 0$, il faut avoir :

$$a - ct \leq x \leq b + ct.$$

Si $t < \frac{a-x}{c}$ ou $t < \frac{x-b}{c}$, alors $u(t, x) = 0$: l'information n'est pas encore parvenue jusqu'au point x .

1.1.4 Stabilité

De la formule de d'Alembert, on peut déduire une autre propriété de la solution du problème de Cauchy associé à l'équation des ondes : sa stabilité par rapport aux données initiales.

Proposition 1.1.7. Soient (u_0^1, u_1^1) et (u_0^2, u_1^2) deux couples dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tels que :

$$\|u_0^1 - u_0^2\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u_1^1 - u_1^2\|_\infty \leq \varepsilon$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Soient u^1 et u^2 les solutions aux problèmes de Cauchy associés. Alors, pour tout $T > 0$, on a :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad |u^1(t, x) - u^2(t, x)| \leq \varepsilon(1 + T).$$

Démonstration. Soit $T > 0$ et soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. On utilise la formule de d'Alembert :

$$\begin{aligned}
 |u^1(t, x) - u^2(t, x)| &= \left| \frac{1}{2}(u_0^1(x+ct) + u_0^1(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1^1(y) \, dy \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(u_0^2(x+ct) + u_0^2(x-ct)) - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1^2(y) \, dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} \underbrace{|u_0^1(x+ct) - u_0^2(x+ct)|}_{\leq \varepsilon} + \frac{1}{2} \underbrace{|u_0^1(x-ct) - u_0^2(x-ct)|}_{\leq \varepsilon} \\
 &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \underbrace{|u_1^1(y) - u_1^2(y)|}_{\leq \varepsilon} \, dy \\
 &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2c}\varepsilon(x+ct - (x-ct)) \\
 &= \varepsilon(1+t) \\
 &= \varepsilon(1+T).
 \end{aligned}$$

■

1.1.5 Conservation d'énergie

Considérons une solution u de l'équation des ondes suffisamment régulière et tendant vers 0 à l'infini. On définit l'énergie totale de la solution à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\partial_t u(t, x)|^2 + c^2 |\partial_x u(t, x)|^2) \, dx.$$

La solution est dite d'énergie finie si $E(t) < +\infty$. Au temps $t = 0$, c'est le cas par exemple si $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. En l'absence de terme source dans l'équation des ondes, cette énergie est conservée au cours du temps.

Proposition 1.1.8. Soit u solution de l'équation des ondes suffisamment régulière. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad E(t) = E(0).$$

Démonstration. On multiplie l'équation des ondes par $\partial_t u(t, x)$ et on intègre en x :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t^2 u(t, x) \partial_t u(t, x) \, dx - c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(t, x) \partial_t u(t, x) \, dx = 0.$$

On remarque :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t^2 u(t, x) \partial_t u(t, x) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t, x))^2 \, dx.$$

Par intégration par parties, on montre d'autre part :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(t, x) \partial_t u(t, x) \, dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t, x))^2 \, dx.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t, x))^2 dx + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t, x))^2 dx = 0,$$

ce qui revient à écrire $E'(t) = 0$: E est donc constante. ■

Corollaire 1.1.9. Le problème de Cauchy associé à l'équation des ondes admet au plus une solution d'énergie finie.

Démonstration. Soient u^1 et u^2 deux solutions d'énergie finie du problème de Cauchy. Soit $v := u^1 - u^2$. Par linéarité, v est donc aussi solution d'énergie finie du problème de Cauchy homogène, avec conditions initiales identiquement nulles. L'énergie de v est constante égale à son énergie initiale, qui est nulle. Ceci implique :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \partial_t v(t, x) = \partial_x v(t, x) = 0,$$

donc v est constante à la fois en temps et en espace, donc nulle puisque $v(0, \cdot) = 0$. ■

1.1.6 Quelques autres conséquences

L'équation des ondes n'a aucun effet régularisant : la solution n'est ni plus, ni moins régulière que la donnée initiale.

Par ailleurs, contrairement à l'équation de la chaleur, on ne retrouve pas de principe du maximum. Par exemple, avec $u_0 \equiv 0$ et $u_1 \neq 0$, on trouve une solution non nulle, qui en particulier ne vérifie pas :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \leq u(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} u_0(x).$$

1.2 L'équation des ondes avec terme source

1.2.1 Problème de Cauchy

On introduit maintenant un terme source dans l'équation. On recherche $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ sont données.

Proposition 1.2.1. Le problème (1.3) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta_{t,x}} f(r, y) dr dy,$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{où :} \\ \Delta_{t,x} := \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq r \leq t \text{ et } x - c(t - r) \leq y \leq x + c(t - r)\}. \end{array} \right.$$

Démonstration. La preuve est similaire au cas homogène. On commence par poser

$$v := \partial_t u + c \partial_x u.$$

On obtient alors :

$$\partial_t v - c \partial_x v = f$$

où on reconnaît une équation de transport dont la solution est donnée par la formule de Duhamel. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(t, x) &= v(0, x + ct) + \int_0^t f(s, x + c(t - s)) \, ds \\ &= u_1(x + ct) + cu'_0(x + ct) + \int_0^t f(s, x + c(t - s)) \, ds. \end{aligned}$$

Revenant à la définition de v , on reconnaît également une équation de transport. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u(0, x - ct) + \int_0^t v(s, x - c(t - s)) \, ds \\ &= u_0(x - ct) + \int_0^t u_1(x + cs) \, ds + c \int_0^t u'_0(x + cs) \, ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s f(r, x - c(t - s) + c(s - r)) \, dr \, ds. \end{aligned}$$

Toujours comme dans le cas homogène, on passe par un changement de variable :

$$\int_0^t u_1(x + cs) \, ds = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) \, dy.$$

et :

$$c \int_0^t u'_0(x + cs) \, ds = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) - u_0(x - ct)).$$

Intéressons-nous au domaine d'intégration de f . Il s'agit de la partie du plan définie par :

$$0 \leq s \leq t \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq s,$$

ce qui équivaut à :

$$0 \leq r \leq t \quad \text{et} \quad r \leq s \leq t.$$

Ainsi :

$$\int_0^t \int_0^s f(r, x - c(t - s) + c(s - r)) \, dr \, ds = \int_0^t \int_r^t f(r, x - c(t - s) + c(s - r)) \, ds \, dr.$$

On effectue un changement de variable dans l'intégrale par rapport à s :

$$y := x - c(t - s) + c(s - r),$$

ce qui nous donne :

$$\int_0^t \int_r^t f(r, x - c(t - s) + c(s - r)) \, ds \, dr = \int_0^t \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(r, y) \frac{1}{2c} f(r, y) \, dy \, dr,$$

et on obtient le résultat en combinant toutes ces égalités. ■

Tout comme dans le cas homogène, on déduit de la formule de d'Alembert un résultat de stabilité L^∞ pour ce problème de Cauchy.

Proposition 1.2.2. Soient (u_0^1, u_1^1, f^1) et (u_0^2, u_1^2, f^2) deux triplets dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ tels que :

$$\|u_0^1 - u_0^2\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \|u_1^1 - u_1^2\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f^1 - f^2\|_\infty \leq \varepsilon$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Soient u^1 et u^2 les solutions aux problèmes de Cauchy associés. alors, pour tout $T > 0$:

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad |u^1(t, x) - u^2(t, x)| \leq \varepsilon \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right).$$

1.2.2 Domaine de dépendance et cône d'influence

La formule de d'Alembert indique que, pour connaître la valeur de u en un point $x \in \mathbb{R}$ au temps $t \in \mathbb{R}^+$, il suffit de connaître les valeurs de u_0 en $x \pm ct$, de u_1 sur $[x - ct, x + ct]$ et de f sur $\Delta_{t,x}$. Ce dernier contient les deux autres. Ainsi, le triangle $\Delta_{t,x}$ est appelé domaine de dépendance de (t, x) : la solution dépend des données dans ce triangle, et ne dépend d'aucune autre information.

Réciproquement, considérons un point (r, y) du plan. Alors la valeur en (t, x) influencera celle en (r, y) si et seulement si $(t, x) \in \Delta_{r,y}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$0 \leq t \leq r \quad \text{et} \quad y - c(r - t) \leq x \leq y + c(r - t),$$

ou, autrement dit :

$$0 \leq t \leq r \quad \text{et} \quad x - c(r - t) \leq y \leq x + c(r - t).$$

En notant :

$$\Gamma_{t,x} := \{(r, y) \in \mathbb{R}^2 ; r \geq t \text{ et } x + c(t - r) \leq y \leq x - c(t - r)\},$$

on obtient que seuls les points contenus dans $\Gamma_{t,x}$ seront influencés par la valeur de u en (t, x) . Cet ensemble est appelé cône d'influence de (t, x) . Les ensembles $\Delta_{t,x}$ et $\Gamma_{t,x}$ sont illustrés dans la [Figure 1.2](#).

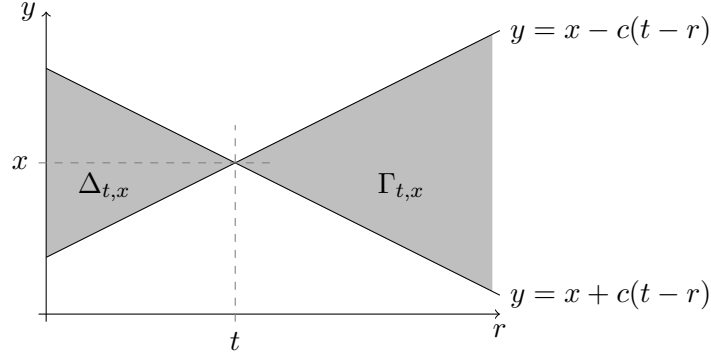


FIGURE 1.2 – Domaine de dépendance et cône d'influence.

1.3 L'équation des ondes en domaine borné

On s'intéresse maintenant à l'équation des ondes posée dans un domaine borné en espace :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) = 0, & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times]0, L[, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour } x \in [0, L], \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x), & \text{pour } x \in [0, L], \\ u(t, 0) = 0, & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \\ u(t, L) = 0, & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

On cherche une solution non nulle de (1.4) à variables séparées, c'est-à-dire sous la forme :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, L], \quad u(t, x) = T(t)X(x),$$

avec $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ et $X \in \mathcal{C}^2([0, L])$. Alors :

$$\partial_t^2 u = T''X \quad \text{et} \quad \partial_x^2 u = TX''.$$

Comme u satisfait l'équation des ondes, on trouve :

$$T''X - c^2 TX'' = 0.$$

Formellement, on obtient alors :

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable t , tandis que le membre de droite ne dépend que de la variable x . On en déduit l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

En particulier :

$$\forall x \in]0, L[, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\forall x \in [0, L], \quad X(x) = \alpha e^{i\lambda x} + \beta e^{-i\lambda x},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On utilise les conditions de Dirichlet :

$$X(0) = X(L) = 0.$$

D'une part :

$$0 = X(0) = \alpha + \beta,$$

soit $\beta = -\alpha$, donc :

$$X(x) = 2i\alpha \sin(\lambda x).$$

D'autre part :

$$0 = X(L) = 2i\alpha \sin(\lambda L).$$

Comme on cherche une solution non nulle, $\alpha \neq 0$, donc $\sin(\lambda L) = 0$. Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n := \frac{n\pi}{L}$. Il reste à résoudre :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad T''(t) + \mu_n^2 T(t) = 0,$$

avec $\mu_n := \lambda_n c$. On trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad T_n(t) = \alpha_n \cos(\lambda_n ct) + \beta_n \sin(\lambda_n ct).$$

On obtient donc des solutions de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u_n(t, x) = (a_n \cos(\lambda_n ct) + b_n \sin(\lambda_n ct)) \sin(\lambda_n x).$$

Chapitre 2

Différences finies

On cherche à résoudre numériquement le problème de Cauchy (1.4). Pour cela, on discrétise les intervalles de temps et d'espace. Commençons par le temps en se donnant $N \in \mathbb{N}^*$ et en définissant :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n := n\Delta t, \quad \text{où } \Delta t := \frac{T}{N}.$$

L'espace se discrétise de manière similaire en se donnant $J \in \mathbb{N}^*$ et en définissant :

$$\forall j \in \llbracket 0, J \rrbracket, \quad x_j := j\Delta x, \quad \text{où } \Delta x := \frac{L}{J}.$$

2.1 Schéma intérieur

On considère un schéma centré à la fois en temps et en espace pour l'équation volumique :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad \forall (n, j) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \times \llbracket 1, J-1 \rrbracket.$$

On prend en compte les conditions de Dirichlet au bord spatial :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad u_0^n = u_J^n = 0.$$

Intéressons-nous à l'ordre de consistance de ce schéma. On écrit les développements de Taylor d'une solution régulière de (1.4) :

$$\begin{aligned} u(t^{n+1}, x_j) &= u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^4), \\ u(t^{n-1}, x_j) &= u(t^n, x_j) - \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(t^n, x_j) - \frac{\Delta t^3}{6} \partial_t^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - 2u(t^n, x_j) + u(t^{n-1}, x_j))}{\Delta t^2} = \partial_t^2 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

On fait de même en espace :

$$\begin{aligned} u(t^n, x_{j+1}) &= u(t^n, x_j) + \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^4), \\ u(t^n, x_{j-1}) &= u(t^n, x_j) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_x^2 u(t^n, x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_x^3 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{u(t^n, x_{j-1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j+1}))}{\Delta x^2} = \partial_x^2 u(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

L'erreur de consistance s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{u(t^{n+1}, x_j) - 2u(t^n, x_j) + u(t^{n-1}, x_j))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(t^n, x_{j-1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j+1}))}{\Delta x^2} \\ = \underbrace{\partial_t^2 u(t^n, x_j) - c^2 \partial_x^2 u(t^n, x_j)}_{=0} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

2.2 Initialisation

Le schéma défini est explicite et permet d'obtenir tous les $u_j^n \dots$ mais à partir de $n = 2$. Il faut donc l'initialiser avec les u_j^0 et u_j^1 . La définition des premiers est assez directe :

$$\forall j \in \llbracket 0, J \rrbracket, \quad u_j^0 := u_0(x_j).$$

Pour les u_j^1 , il faut utiliser la deuxième condition initiale du problème :

$$\partial_t u(0, \cdot) = u_1.$$

Une idée consiste à approcher la dérivée première. Le plus naturel est de proposer un schéma décentré :

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = u_1(x_j).$$

On peut cependant montrer que ce schéma est d'ordre 1 en temps. Comme le schéma intérieur est d'ordre 2, c'est un peu dommage : cette initialisation fera que, globalement, le schéma sera d'ordre 1. Voyons si on peut aller plus loin en écrivant un développement de Taylor jusqu'à un ordre un peu plus élevé :

$$u(t^1, x_j) = u(t^0, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^0, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 u(t^0, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

On connaît $u(t^0, x_j)$ et $\partial_t u(t^0, x_j)$. On ne connaît pas la dérivée seconde. Cependant, on sait que u est solution de l'équation des ondes, donc :

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u.$$

On a déjà vu que la dérivée seconde en espace pouvait être approchée à l'ordre 2 :

$$\partial_x^2 u(t^0, x_j) = \frac{u(t^0, x_{j-1}) - 2u(t^0, x_j) + u(t^0, x_{j+1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

On obtient alors :

$$u(t^1, x_j) = u(t^0, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^0, x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u(t^0, x_{j-1}) - 2u(t^0, x_j) + u(t^0, x_{j+1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Remarque 2.2.1. Il peut paraître déroutant que Δt n'apparaisse pas dans le terme $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Le schéma que l'on a écrit pour approcher la dérivée seconde en espace est indépendant de la discrétisation temporelle : autrement dit, du point de vue de la discrétisation spatiale, Δt est vu comme une constante, d'où sa « disparition ».

L'objectif est toujours d'approcher la dérivée première. On obtient ici :

$$\frac{u(t^1, x_j) - u(t^0, x_j)}{\Delta t} - c^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u(t^0, x_{j-1}) - 2u(t^0, x_j) + u(t^0, x_{j+1}))}{\Delta x^2} = \partial_t u(t^0, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

On obtient ainsi un schéma d'ordre 2.