
Notes de cours

Algèbre linéaire

Jérémy Heleine

Agrégation externe de mathématiques

Université Toulouse III - Paul Sabatier

Dernière mise à jour : 24 septembre 2024

Pour toute question ou remarque : jeremy.heleine@math.univ-toulouse.fr

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence CC BY-NC-SA 4.0.



Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Éléments propres	2
1.1 Valeurs propres, vecteurs propres	2
1.2 Normes subordonnées	3
1.3 Normes et valeurs propres	8
1.4 Localisation des valeurs propres	10
1.5 Méthode de la puissance	11
2 Systèmes linéaires	14
2.1 Conditionnement	14
2.2 Systèmes triangulaires	17
2.3 Méthode du pivot de Gauss	18
2.4 Factorisation LU	21
2.5 Factorisation de Cholesky	23
3 Méthodes itératives	26
3.1 Généralités	26
3.2 Décomposition de la matrice	27
3.3 Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel	28
A Quelques petits résultats faciles	32
Références	ii

Introduction

Ce cours a pour but de rappeler quelques notions d'algèbre linéaire, principalement en vue de deux objectifs : le calcul d'éléments propres et la résolution de systèmes linéaires.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on notera généralement A_{ij} (avec $1 \leq i, j \leq n$) ses coefficients, ou parfois a_{ij} , selon les envies du moment.

Ce cours s'appuie essentiellement sur deux références : [Cia82] et [Ser01].

Chapitre 1

Éléments propres

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$Av = \lambda v.$$

Dans ce cas, v est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $\text{Sp}(A)$. Enfin, on appelle rayon spectral de A le réel positif :

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Remarque 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de A , $\det(A - \lambda I)$.

Exemple 3. On considère

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Recherchons ses valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 3),$$

dont les racines sont $\lambda \in \{1, 3\}$.

Déterminons un vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$Av = 1v \iff \begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \iff y = -x.$$

On peut donc choisir

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, en recherchant un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$, on obtient la condition $x = y$ et on peut donc choisir :

$$v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Normes subordonnées

Définition 4. Une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$ est une norme qui vérifie :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Exemple 5. L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A &\mapsto \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}| \end{aligned}$$

est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ mais pas une norme matricielle. En effet, considérons $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\|A\| = \|B\| = 1$, mais $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, d'où $\|AB\| = 2 > \|A\| \cdot \|B\|$.

Proposition 6. Soit $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: M_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \end{aligned}$$

définit une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, appelée norme subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$.

Démonstration. Norme. Vérifions dans un premier temps que cette application définit bien une norme. Si $A = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $Ax = 0$, et on obtient bien $\|A\| = 0$.

Soit maintenant $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \leq \|A\| = 0,$$

ce qui implique :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|Ax\|_{\mathbb{K}^n} = 0,$$

et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad Ax = 0$$

car $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ est une norme vectorielle. En choisissant par exemple $x := e_j$ le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient que la j -ème colonne de A est identiquement nulle, et ce pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui montre bien que $A = 0$.

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{\|(A+B)x\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \leq \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} + \frac{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \leq \|A\| + \|B\|.$$

En passant au sup, on obtient l'inégalité triangulaire sur la norme subordonnée.

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Toujours en utilisant le fait que $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ est une norme, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{\|(\lambda A)x\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} = |\lambda| \frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \leq |\lambda| \|A\|,$$

et on conclut encore une fois en passant au sup.

Norme matricielle. Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|(AB)x\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \\ &= \sup_{x \notin \ker B} \frac{\|ABx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \\ &= \sup_{x \notin \ker B} \frac{\|ABx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}} \frac{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \\ &\leq \sup_{x \notin \ker B} \frac{\|ABx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}} \times \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ay\|_{\mathbb{K}^n}}{\|y\|_{\mathbb{K}^n}} \times \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_{\mathbb{K}^n}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \\ &= \|A\| \cdot \|B\|, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Exemple 7. On rappelle quelques normes usuelles sur $\mathbb{C}^n$:

- $\|\cdot\|_p : \mathbf{v} \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$;
- $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{v} \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

Théorème 8. Les normes matricielles subordonnées aux normes vectorielles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont données par les expressions :

- $\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|$;
- $\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$;
- $\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$;

pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Norme 1. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_{\|x\|_1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Pour montrer l'égalité, il suffit alors de trouver un vecteur permettant d'atteindre le max. Soit pour cela $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

On pose $x \in \mathbb{K}^n$ défini par :

$$x_j := \begin{cases} 1, & \text{si } j = j_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

par définition de x et de j_0 .

Norme ∞ . La preuve est assez similaire au cas de la norme 1. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

et il suffit donc de trouver un vecteur permettant d'atteindre le maximum pour démontrer l'égalité. Soit pour cela $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

On considère $x \in \mathbb{K}^n$ défini par :

$$x_j := \begin{cases} 1, & \text{si } a_{i_0 j} \geq 0, \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

par définition de x et de i_0 . Comme ici $\|x\|_\infty = 1$, on a ainsi :

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

d'où l'égalité.

Norme 2. La matrice A^*A est auto-adjointe positive. Ses valeurs propres sont donc dans $\mathbb{R}^+$. On les note :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Il existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On peut écrire :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = \left(A^*A \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j \underbrace{((A^*A)e_i, e_j)}_{\lambda_i \delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \alpha_i \bar{\alpha}_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \overbrace{\lambda_i}^{\leq \lambda_n} |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} \leq \lambda_n \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} = \lambda_n = \rho(A^*A).$$

On a donc bien $\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$. Pour obtenir l'égalité, on choisit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i < n, \\ 1, & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\|Ax\|_2^2 = \lambda_n |\alpha_n|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2^2 = |\alpha_n|^2,$$

d'où :

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda_n = \rho(A^*A),$$

et on obtient le résultat voulu. ■

Remarque 9. Pour toute norme subordonnée $\|\cdot\|$, il est immédiat que $\|I\| = 1$. On peut utiliser cela pour démontrer que certaines normes matricielles ne sont subordonnées à aucune norme vectorielle. C'est par exemple le cas de la norme de Frobenius, définie par $A \mapsto \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$. On peut démontrer qu'il s'agit bien d'une norme

matricielle. Cependant, la norme de l'identité est égale à $\sqrt{n}$: il ne s'agit donc pas d'une norme subordonnée.

1.3 Normes et valeurs propres

Cette section a pour but de montrer quelques résultats reliant les valeurs propres d'une matrice à sa norme. Plus particulièrement, la Proposition 10 montre que le rayon spectral d'une matrice est toujours contrôlé par sa norme, quelle que soit la norme choisie.

Proposition 10. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Alors :

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, et soit $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ . Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice dont la première colonne est donnée par v et dont les autres colonnes sont nulles. Comme $Av = \lambda v$, on obtient $AB = \lambda B$ et ainsi :

$$|\lambda| \cdot \|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

d'où $|\lambda| \leq \|A\|$, puisque $B \neq 0$. ■

L'inégalité inverse n'est en général pas vraie. Le Théorème 11 indique cependant que l'on peut s'en approcher, si on choisit la bonne norme.

Théorème 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que :

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $U \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $T := U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. La diagonale de T est alors constituée des valeurs propres de A .

Soit $\delta > 0$. On pose :

$$D_\delta := \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1}),$$

ainsi que $B := D_\delta^{-1}TD_\delta$. La diagonale de B est la même que celle de T , et on peut montrer que les coefficients extra-diagonaux sont ceux de T , multipliés par δ^k où k est l'indice de la sur-diagonale. Autrement dit :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad B_{ij} = \delta^{j-i} T_{ij}.$$

Choisissons δ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n |\delta^{j-i} T_{ij}| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\|(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta)\|_\infty = \|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \delta^{j-i} |T_{ij}| \leq \varepsilon,$$

ce qui permet de définir la norme $\|\cdot\|$ recherchée. ■

Théorème 12. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$;
2. $\forall v \in \mathbb{K}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k v = 0$;
3. $\rho(A) < 1$;
4. il existe $\|\cdot\|$ une norme subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

Démonstration. **1** $\implies$ **2**. Considérons une norme subordonnée $\|\cdot\|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\|A^k v\| \leq \|A^k\| \cdot \|v\|.$$

D'où :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k v\| = 0,$$

ce qui montre le résultat puisque $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

2 $\implies$ **3**. On procède par contraposée. Supposons $\rho(A) \geq 1$. Alors il existe $p \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ap = \lambda p$ avec $|\lambda| \geq 1$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k p = \lambda^k p,$$

donc $\|A^k p\| = |\lambda|^k \|p\|$ qui tend vers $+\infty$ si $|\lambda| > 1$, ou vers $\|p\| \neq 0$ si $|\lambda| = 1$. Dans tous les cas, $A^k p$ ne tend pas vers 0.

3 $\implies$ **4**. Comme $\rho(A) < 1$, on peut définir :

$$\varepsilon := \frac{1 - \rho(A)}{2} > 0.$$

On applique le Théorème 11 : il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon = \rho(A) + \frac{1 - \rho(A)}{2} = \frac{1 + \rho(A)}{2} < 1.$$

4 $\implies$ **1**. Comme $\|\cdot\|$ est en particulier une norme matricielle, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

qui tend vers 0 car $\|A\| < 1$. ■

Proposition 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$, on a :

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ d'une part et, d'autre part, $\rho(A^k) \leq \|A^k\|$ par la Proposition 10, ce qui implique :

$$\rho(A) = \rho(A^k)^{1/k} \leq \|A^k\|^{1/k}.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On pose $B_\varepsilon := \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Ainsi $\rho(B_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$, d'où :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_\varepsilon^k = 0.$$

Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq k_0, \quad \|B_\varepsilon^k\| = \frac{\|A^k\|}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} \leq 1,$$

ce qui donne :

$$\forall k \geq k_0, \quad \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} / \quad \forall k \geq k_0, \quad 0 \leq \|A^k\|^{1/k} - \rho(A) \leq \varepsilon,$$

ce qui est bien le résultat recherché. ■

1.4 Localisation des valeurs propres

Plutôt que de chercher à calculer explicitement les valeurs propres d'une matrice, il peut parfois être suffisant de les localiser. Le Théorème 14, dit de Gerschgorin, permet cela : il nous permet d'affirmer que toute valeur propre d'une matrice est située dans au moins l'un des disques de Gerschgorin, qui sont entièrement caractérisés par les coefficients de la matrice elle-même.

Théorème 14. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note D_i le i -ème disque de Gerschgorin :

$$D_i := \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}.$$

Alors :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad \lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Soit $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ . Par définition, on a :

$$Av = \lambda v.$$

Autrement dit, en considérant cette égalité composante par composante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i.$$

On extrait de la somme le coefficient diagonal :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\lambda - a_{ii}) v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} v_j.$$

Soit maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|v_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$. Comme $v \neq 0$, on a en particulier $v_k \neq 0$. On peut alors reprendre l'égalité précédente (avec $i = k$) pour obtenir :

$$\lambda - a_{kk} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} \frac{v_j}{v_k}.$$

On passe au module :

$$|\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} \frac{v_j}{v_k} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \underbrace{\left| \frac{v_j}{v_k} \right|}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|,$$

par définition de v_k . ■

1.5 Méthode de la puissance

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Supposons que ses valeurs propres vérifient :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

On note $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs propres associés, de sorte que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ forme une base de $\mathbb{K}^n$. L'objectif est de calculer la valeur propre dominante λ_1 . On s'intéresse pour cela à la méthode de la puissance décrite dans l'Algorithme 15.

Algorithme 15 : Méthode de la puissance

Entrée : $q^{(0)} \notin \text{vect}\{u_2, \dots, u_n\}$ donné

pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\quad \left| \quad q^{(k)} := \frac{Aq^{(k-1)}}{\|Aq^{(k-1)}\|} \right.$$

L'Algorithme 15 construit une suite $(q^{(k)})_k$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, d'où l'on peut déduire une suite qui converge vers un vecteur propre q associé à λ_1 , ainsi qu'une suite qui converge vers λ_1 , comme l'affirme le Théorème 16.

Théorème 16. La suite $(q^{(k)})_k$ vérifie :

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Aq^{(k)}\| = |\lambda_1|$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|} \right)^k q^{(k)} = q$, où q est un vecteur propre associé à λ_1 ;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(Aq^{(k)})_j}{q_j^{(k)}} = \lambda_1$, dès que $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est tel que $q_j \neq 0$.

Démonstration. Préambule. Par définition de la suite $(q^{(k)})_k$ à l'étape $k-1$, on peut écrire :

$$q^{(k-1)} = \frac{Aq^{(k-2)}}{\|Aq^{(k-2)}\|},$$

d'où l'on déduit directement :

$$Aq^{(k-1)} = \frac{A^2q^{(k-2)}}{\|Aq^{(k-2)}\|}, \quad \text{et} \quad \|Aq^{(k-1)}\| = \frac{\|A^2q^{(k-2)}\|}{\|Aq^{(k-2)}\|}.$$

Ainsi on peut montrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q^{(k)} = \frac{Aq^{(k-1)}}{\|Aq^{(k-1)}\|} = \frac{A^2q^{(k-2)}}{\|A^2q^{(k-2)}\|} = \dots = \frac{A^kq^{(0)}}{\|A^kq^{(0)}\|}.$$

Écrivons maintenant :

$$q^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \quad (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n.$$

Comme $q^{(0)} \notin \text{vect}\{u_2, \dots, u_n\}$ par hypothèse, on a en particulier $\alpha_1 \neq 0$ et on peut écrire :

$$A^k q^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k u_i = \alpha_1 \lambda_1^k \left(u_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k u_i}_{=: y^{(k)}} \right).$$

Par hypothèse sur λ_1 , on montre facilement :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y^{(k)} = 0,$$

et c'est précisément ce qui va nous servir dans toute la suite de la preuve.

Première limite. Par ce qui précède, on peut écrire $Aq^{(k)} = \frac{A^{k+1}q^{(0)}}{\|A^kq^{(0)}\|}$, d'où :

$$\|Aq^{(k)}\| = \frac{\|A^{k+1}q^{(0)}\|}{\|A^kq^{(0)}\|} = \frac{\|\alpha_1 \lambda_1^{k+1} (u_1 + y^{(k+1)})\|}{\|\alpha_1 \lambda_1^k (u_1 + y^{(k)})\|} = |\lambda_1| \frac{\|u_1 + y^{(k+1)}\|}{\|u_1 + y^{(k)}\|},$$

d'où :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Aq^{(k)}\| = |\lambda_1|.$$

Seconde limite. Toujours par ce qui a été fait auparavant, on peut écrire :

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1| |\lambda_1^k|} \frac{u_1 + y^{(k)}}{\|u_1 + y^{(k)}\|},$$

d'où :

$$\left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|} \right)^k q^{(k)} = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \frac{u_1 + y^{(k)}}{\|u_1 + y^{(k)}\|},$$

et ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|} \right)^k q^{(k)} = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \frac{u_1}{\|u_1\|} =: q,$$

qui est bien un vecteur propre associé à λ_1 par définition de u_1 .

Troisième limite. On peut rapidement vérifier que $\|q\| = 1$. En particulier, $q \neq 0$ et il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $q_j \neq 0$. Pour un tel j , on peut écrire :

$$(Aq^{(k)})_j = \frac{(A^{k+1} q^{(0)})_j}{\|A^{k+1} q^{(0)}\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1} (u_{1,j} + y_j^{(k+1)})}{\|A^{k+1} q^{(0)}\|},$$

ainsi que :

$$q_j^{(k)} = \frac{(A^k q^{(0)})_j}{\|A^k q^{(0)}\|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k (u_{1,j} + y_j^{(k)})}{\|A^k q^{(0)}\|}.$$

On obtient :

$$\frac{(Aq^{(k)})_j}{q_j^{(k)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1} (u_{1,j} + y_j^{(k+1)})}{\alpha_1 \lambda_1^k (u_{1,j} + y_j^{(k)})} = \lambda_1 \frac{u_{1,j} + y_j^{(k+1)}}{u_{1,j} + y_j^{(k)}},$$

d'où l'on déduit la troisième et dernière limite. ■

Remarque 17. Dans la pratique, il peut également être utile de définir la suite $(\lambda^{(k)})_k$ par :

$$\lambda^{(k)} := q^{(k)*} A q^{(k)}.$$

En utilisant le même procédé que dans la preuve du Théorème 16, on peut montrer :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1.$$

Remarque 18. En appliquant la méthode de la puissance à la matrice A^{-1} , on peut approcher la valeur propre de plus petit module. Plus généralement, appliquer cette méthode à la matrice $(A - \mu I)^{-1}$, avec $\mu \in \mathbb{C}$, permet d'approcher la valeur propre de A la plus proche de μ : c'est la méthode de la puissance inverse. Bien sûr, en pratique, on ne calcule jamais ces matrices inverses explicitement : on préfère plutôt faire appel à des méthodes de résolution de systèmes linéaires.

Chapitre 2

Systèmes linéaires

2.1 Conditionnement

La notion de conditionnement d'un système linéaire permet de quantifier sa stabilité par rapport à de faibles perturbations, aussi bien dans la matrice que dans le second membre.

Définition 19. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible. On appelle conditionnement de A le réel :

$$\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée.

Comme on considère une norme subordonnée, on sait que $\|I\| = 1$. Ainsi, $\text{cond}(I) = 1$, ce qui peut être vu comme une valeur de référence : bien entendu, un système défini par la matrice identité est très certainement le système le plus facile à résoudre (puisqu'il n'y a rien à faire...). Plus le conditionnement d'une matrice est proche de 1, plus elle se « rapproche » de l'identité, et donc plus le système sera facile à inverser. Au contraire, un système dont le conditionnement est très éloigné de 1 est dit « mal conditionné » et pourra amener bien des problèmes.

Proposition 20. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors :

1. $\text{cond}(A) \geq 1$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.

Si, de plus, A est normale (c'est-à-dire, pour rappel, $A^*A = AA^*$), alors :

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|}.$$

Démonstration. Commençons par les deux premiers points.

1. Comme $\|\cdot\|$ est subordonnée, on peut écrire :

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On écrit la définition du conditionnement :

$$\text{cond}(\alpha A) = \|\alpha A\| \cdot \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha| \cdot \|A\| \cdot |\alpha|^{-1} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

Intéressons-nous maintenant à la norme 2. Par définition :

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2.$$

On applique le Théorème 8 :

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\rho(A^*A)} \sqrt{\rho((A^{-1})^*A^{-1})} = \sqrt{\rho(A^*A)} \sqrt{\rho((A^*A)^{-1})}.$$

Les valeurs propres de A^*A sont réelles. Comme A est inversible, elles sont de plus strictement positives. On peut donc les ordonner :

$$0 < |\lambda_1|^2 \leq |\lambda_2|^2 \leq \dots \leq |\lambda_n|^2,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A . Ainsi :

$$\rho(A^*A) = |\lambda_n|^2 \quad \text{et} \quad \rho((A^*A)^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_1|^2},$$

d'où l'égalité. ■

Intéressons-nous maintenant de plus près à cette histoire de stabilité par rapport à de faibles perturbations.

Proposition 21. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et $b \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Soit $u \in \mathbb{K}^n$ la solution du système $Au = b$. Soient $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ inversible une « perturbation » de A et $\tilde{b} \in \mathbb{K}^n$ une « perturbation » de b . On note $\delta_A := A - \tilde{A}$ et $\delta_b := b - \tilde{b}$. Soit $\tilde{u} \in \mathbb{K}^n$ la solution du système perturbé $\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b}$. Supposons que $\|\delta_A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Alors l'erreur relative est contrôlée :

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right).$$

Démonstration. Par définition de u et $\tilde{u}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} b - \tilde{b} &= Au - \tilde{A}\tilde{u} \\ &= Au - A\tilde{u} + A\tilde{u} - \tilde{A}\tilde{u} \\ &= A(u - \tilde{u}) + (A - \tilde{A})\tilde{u} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$u - \tilde{u} = A^{-1}(\underbrace{b - \tilde{b}}_{\delta_b}) - A^{-1}(\underbrace{A - \tilde{A}}_{\delta_A})\tilde{u},$$

d'où :

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|(\|\delta_b\| + \|\delta_A\| \cdot \|\tilde{u}\|).$$

Par ailleurs, on peut toujours écrire

$$\tilde{u} = \tilde{u} - u + u,$$

que l'on injecte dans l'inégalité précédente :

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|(\|\delta_b\| + \|\delta_A\|(\|u - \tilde{u}\| + \|u\|)).$$

On en déduit :

$$(1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta_A\|)\|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|(\|\delta_b\| + \|\delta_A\| \cdot \|u\|).$$

Par hypothèse sur $\|\delta_A\|$, on obtient alors :

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta_A\|} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|u\|} + \|\delta_A\| \right) = \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta_A\|} \left(\frac{\|\delta_b\|}{\|A\| \cdot \|u\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right).$$

Or, $b = Au$, donc $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|u\|$, d'où $\frac{1}{\|A\| \cdot \|u\|} \leq \frac{1}{\|b\|}$, d'où le résultat en utilisant de plus la définition du conditionnement. ■

Cette inégalité permet de mieux comprendre pourquoi il est intéressant d'avoir un conditionnement aussi proche de 1 que possible. En effet, si on a affaire à de faibles perturbations ($\|\delta_b\| \ll 1$ et $\|\delta_A\| \ll 1$), alors on s'attend à ce que le terme de droite soit petit. C'est bien le cas si le conditionnement de A est proche de 1, mais ce même terme peut devenir très grand si ce n'est pas le cas. Bien entendu, cela n'implique pas que l'erreur relative sera nécessairement très grande, mais on ne peut pas non plus garantir le contraire. L'exemple suivant montre à quel point un mauvais conditionnement peut nous éloigner d'une solution initiale.

Exemple 22. Soient :

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

La solution du système $Au = b$ est $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Perturbons uniquement le second

membre en considérant :

$$\tilde{b} := \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix},$$

ce qui mène à la solution $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 832 \\ 1324 \\ -2407 \\ 2021 \end{pmatrix}$, très éloignée de u alors que la différence

(relative) entre b et $\tilde{b}$ n'est pas si importante que cela. Ici, le conditionnement (en norme 2) de A est proche de 35 792.

2.2 Systèmes triangulaires

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et $b \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. On souhaite résoudre le système $Au = b$.

Supposons dans un premier temps que A soit triangulaire inférieure, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ou, dit encore autrement, vérifiant $a_{ij} = 0$ dès que $j > i$. Le système correspondant est alors assez facile à écrire :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 & = b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n & = b_n \end{cases}$$

et tout aussi facile à résoudre via une méthode de descente : on détermine u_1 , puis on en déduit u_2 , etc., jusqu'à pouvoir obtenir u_n . Cette méthode est formalisée dans l'Algorithme 23.

Algorithme 23 : Méthode de descente

$$u_1 := \frac{b_1}{a_{11}}$$

pour i de 2 à n

$$\left[u_i := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j \right) \right]$$

Remarque 24. Les coefficients a_{ii} sont tous non nuls car A est triangulaire et inversible (son déterminant, non nul, est égal au produit de ses coefficients diagonaux).

De manière similaire, on peut facilement résoudre un système triangulaire supérieur. Supposons que A soit de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire vérifiant $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On écrit le système correspondant :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = b_1 \\ a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n = b_n \end{cases}$$

que l'on peut résoudre via une méthode de remontée : on détermine u_n , on en déduit u_{n-1} , et ainsi de suite. On formalise cette méthode dans l'Algorithme 25.

Algorithme 25 : Méthode de remontée

$u_n := \frac{b_n}{a_{nn}}$
pour i de $n-1$ à 1
 $u_i := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}u_j \right)$

Les méthodes de descente et de remontée utilisent toutes les deux exactement le même nombre d'opérations élémentaires, qu'il est par ailleurs plutôt facile de compter. Au total, on dénombre ainsi :

$$\begin{cases} 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ multiplications,} \\ 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ additions,} \\ n \text{ divisions.} \end{cases}$$

La complexité de ces algorithmes est donc un $O(n^2)$.

2.3 Méthode du pivot de Gauss

On cherche toujours à résoudre un système de la forme $Au = b$. La méthode du pivot de Gauss, sans changement de pivot, consiste à éliminer des inconnues jusqu'à obtenir un système triangulaire, qui peut alors être facilement résolu comme on l'a vu précédemment.

Algorithme 26 : Méthode du pivot de Gauss

```

 $A^{(1)} := A$ 
 $b^{(1)} := b$ 
pour  $k$  de 1 à  $n - 1$ 
   $A^{(k+1)} := A^{(k)}$ 
   $b^{(k+1)} := b^{(k)}$ 
  pour  $i$  de  $k + 1$  à  $n$ 
     $m_{ik} := \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ 
    pour  $j$  de  $k$  à  $n$ 
       $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}$ 
       $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}$ 

```

L'idée est de modifier à la fois A et b . Matriciellement, on obtient un système de la forme $MAu = Mb$: la solution est toujours la même, mais MA est « plus facilement inversible » (triangulaire, typiquement).

Le système final obtenu, $A^{(n)}u = b^{(n)}$, est triangulaire supérieur et peut alors être résolu rapidement à l'aide d'une méthode de remontée. Comme pour les algorithmes dédiés aux systèmes triangulaires, on peut là aussi compter le nombre d'opérations élémentaires. Pour modifier les coefficients de la matrice, on compte, pour chaque $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$:

$$\begin{cases} n - k \text{ divisions,} \\ (n - k)(n - k + 1) = (n - k)^2 + (n - k) \text{ additions et multiplications.} \end{cases}$$

Au total, on trouve ainsi :

$$\begin{cases} (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ divisions,} \\ (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \dots + 1^2 + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \\ \quad = \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n^3 - n}{3} \text{ additions et multiplications.} \end{cases}$$

La méthode du pivot de Gauss a donc une complexité en $O(n^3)$.

Remarque 27. Cette méthode nécessite de diviser par le « pivot », ici $a_{kk}^{(k)}$. Autrement dit, il est nécessaire que ce terme soit non nul à chaque étape k , ce qui n'est pas toujours garanti. Pour contourner ce problème, il est possible d'adopter une stratégie de changement de pivot, ce qui d'ailleurs peut également être utile pour améliorer la stabilité numérique de la méthode. On trouve deux stratégies de changement de pivot.

Changement partiel. Le pivot est choisi comme l'élément de plus grand module

dans la colonne à éliminer :

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|.$$

On échange les lignes p et k dans $A^{(k+1)}$ et $b^{(k+1)}$, puis on continue normalement.

Changement total. Le pivot est choisi dans toute la sous-matrice restante :

$$|a_{pq}^{(k)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|.$$

On échange les lignes p et k dans $A^{(k+1)}$ et $b^{(k+1)}$, ainsi que les colonnes q et k dans $A^{(k+1)}$, avant de continuer.

Exemple 28. Partons du système :

$$\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 &= 12 \\ 5u_1 - 6u_2 + 2u_3 &= -1 \\ -4u_1 + 2u_2 + u_3 &= 3 \end{cases}.$$

Dans un premier temps, on va éliminer l'inconnue u_1 des lignes 2 et 3. Pour cela, on effectue les opérations :

$$\begin{aligned} \ell_2 &\leftarrow \ell_2 - \ell_1, \\ \ell_3 &\leftarrow \ell_3 + \frac{4}{5}\ell_1. \end{aligned}$$

On trouve le système :

$$\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 &= 12 \\ -8u_2 + u_3 &= -13 \\ \frac{18}{5}u_2 + \frac{9}{5}u_3 &= \frac{63}{5} \end{cases}.$$

On cherche maintenant à éliminer l'inconnue u_2 de la troisième ligne, ce qui peut être fait avec l'opération :

$$\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{9}{20}\ell_2.$$

On obtient alors le système triangulaire :

$$\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 + u_3 &= 12 \\ -8u_2 + u_3 &= -13 \\ \frac{9}{4}u_3 &= \frac{27}{4} \end{cases}$$

qui peut être résolu par remontée pour trouver :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matriciellement, on a en fait obtenu le système $MAu = Mb$ avec $M = E_2E_1$ où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix},$$

ces matrices pouvant être facilement déduites des opérations effectuées sur les lignes.

2.4 Factorisation LU

Dans certains cas, il peut être avantageux de chercher une certaine factorisation de la matrice d'un système avant de chercher à résoudre ce dernier.

Théorème 29. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les matrices $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ sont inversibles. Alors il existe un unique couple de matrices (L, U) tel que L est triangulaire inférieure à diagonale égale à 1, U est triangulaire supérieure, et :

$$A = LU.$$

Démonstration. Existence. L'existence de la décomposition LU peut se déduire de la méthode du pivot de Gauss. Les conditions sur A permettent une stratégie sans changement de pivot. Ainsi, à chaque étape, les opérations faites sur les lignes peuvent se traduire par la multiplication à gauche par une matrice de transvection, triangulaire inférieure. On obtient finalement une égalité de la forme :

$$EA = U$$

avec U triangulaire supérieure et E un produit de matrices de transvection, donc triangulaire inférieure. En posant $L := E^{-1}$, on obtient bien $A = LU$.

Unicité. Considérons L_1 et L_2 triangulaires inférieures à diagonale égale à 1, et U_1 et U_2 triangulaires supérieures, telles que :

$$A = L_1U_1 = L_2U_2.$$

On en déduit :

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}.$$

Comme L_1 et L_2 sont triangulaires inférieures, le produit $L_2^{-1}L_1$ également. De même, $U_2U_1^{-1}$ est triangulaire supérieure. Ainsi, $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ est diagonale. Comme la diagonale de L_1 et L_2 est égale à 1, il en va de même pour celle de $L_2^{-1}L_1$. Comme cette matrice est diagonale, c'est l'identité. On a donc obtenu :

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I,$$

soit $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$. ■

Remarque 30. On peut assez facilement écrire un algorithme permettant de calculer la décomposition LU d'une matrice A . Pour cela, écrivons $A = LU$ avec L triangulaire inférieure à diagonale égale à 1 et U triangulaire supérieure :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} U_{kj}.$$

Observons ce qu'il se passe à la première ligne :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{1j} = \sum_{k=1}^n L_{1k} U_{kj} = L_{11} U_{1j},$$

car L est triangulaire inférieure. Comme de plus $L_{11} = 1$, on trouve directement la première ligne de U :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad U_{1j} = A_{1j}.$$

Observons maintenant la première colonne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{i1} = \sum_{k=1}^n L_{ik} U_{k1} = L_{i1} U_{11},$$

car U est triangulaire supérieure. Or, on vient de voir que $U_{11} = A_{11}$. On se place dans les hypothèses du Théorème 29 : $A_{11} \neq 0$, d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}}.$$

On peut généraliser cette idée. Soit $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons que les lignes $1, \dots, \ell - 1$ de L ont été définies, ainsi que les colonnes $1, \dots, \ell - 1$ de U . Regardons la ℓ -ème ligne de A :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{\ell j} = \sum_{k=1}^n L_{\ell k} U_{kj} = \sum_{k=1}^{\ell-1} \underbrace{L_{\ell k} U_{kj}}_{\text{connu}} + \underbrace{L_{\ell \ell}}_{=1} U_{\ell j} + \sum_{k=\ell+1}^n \underbrace{L_{\ell k}}_{=0} U_{kj}.$$

On en déduit :

$$\forall j \in \llbracket \ell, n \rrbracket, \quad U_{\ell j} = A_{\ell j} - \sum_{k=1}^{\ell-1} L_{\ell k} U_{kj}.$$

En faisant de même avec la ℓ -ème colonne de A , on trouve :

$$\forall i \in \llbracket \ell + 1, n \rrbracket, \quad L_{i\ell} = \frac{1}{U_{\ell\ell}} \left(A_{i\ell} - \sum_{k=1}^{\ell-1} L_{ik} U_{k\ell} \right).$$

Considérons $A \in M_n(\mathbb{K})$ admettant une factorisation LU. On cherche à résoudre le système :

$$Au = b$$

avec $b \in \mathbb{K}^n$. Ce système est bien sûr équivalent au suivant :

$$(LU)u = b.$$

Posons $v := Uu$. On peut alors résoudre le système initial en deux étapes. D'abord, on détermine v en résolvant le système :

$$Lv = b$$

par une méthode de descente. On calcule ensuite u en résolvant :

$$Uu = v$$

par une méthode de remontée. Dans la pratique, calculer une décomposition LU n'est pas gratuit et il n'est pas toujours avantageux de le faire pour résoudre un système une seule fois. Cependant, il arrive souvent que l'on veuille résoudre un même système plusieurs fois, avec des seconds membres différents. Dans ce cas, il est intéressant, en terme de temps de calcul, de factoriser A une bonne fois pour toutes avant de résoudre les systèmes, les méthodes de remontée et de descente étant beaucoup plus rapides qu'un pivot de Gauss.

2.5 Factorisation de Cholesky

La factorisation LU s'applique à des systèmes relativement génériques. Dans certains cas, cependant, d'autres factorisations existent, comme la factorisation de Cholesky qui suit.

Théorème 31. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure B telle que :

$$A = BB^T.$$

Si on suppose de plus que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs, alors cette décomposition est unique.

Démonstration. Existence. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$. Soit $w \in \mathbb{R}^k$. On définit $v \in \mathbb{R}^n$ par :

$$v_i := \begin{cases} w_i, & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a facilement $w^T A_k w = v^T A v$. Comme A est symétrique définie positive, on en déduit alors que les A_k le sont également. Les sous-matrices A_k sont donc toutes inversibles, et ainsi A admet une factorisation LU.

Comme la diagonale de L est uniquement constituée de 1, on trouve :

$$\det(A_k) = \det((u_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}) = \prod_{i=1}^k u_{ii}.$$

Comme $\det(A_k) > 0$, ceci montre que tous les u_{ii} sont strictement positifs. On peut donc définir $\Lambda := \text{diag}(\sqrt{u_{ii}})$, inversible. Ainsi on peut écrire :

$$A = LU = L(\Lambda\Lambda^{-1})U = BC$$

où $B := L\Lambda$ et $C := \Lambda^{-1}U$. On peut notamment obtenir :

$$B = L\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \Lambda^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Or, $A = A^T$, ce qui peut également s'écrire :

$$BC = (BC)^T = C^T B^T,$$

c'est-à-dire :

$$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T.$$

Les matrices C et $(B^T)^{-1}$ étant triangulaires supérieures, il en va de même pour $C(B^T)^{-1}$. De plus :

$$C(B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$B^{-1}C^T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = I,$$

d'où $C = B^T$.

Unicité. Soient B_1 et B_2 triangulaires inférieures telles que :

$$A = B_1 B_1^T = B_2 B_2^T.$$

Soit Δ_j la diagonale de B_j , pour $j \in \{1, 2\}$. On peut alors écrire :

$$A = (B_1 \Delta_1^{-1})(\Delta_1 B_1^T),$$

où l'on reconnaît la factorisation LU de A , factorisation qui apparaît de la même façon avec :

$$A = (B_2 \Delta_2^{-1})(\Delta_2 B_2^T).$$

Or, la factorisation LU est unique, donc on en déduit :

$$B_1 \Delta_1^{-1} = B_2 \Delta_2^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_1 B_1^T = \Delta_2 B_2^T.$$

Pour $j \in \{1, 2\}$, on note $b_i^{(j)}$ les éléments diagonaux de B_j . Comme $\Delta_1 B_1^T = \Delta_2 B_2^T$, on obtient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (b_i^{(1)})^2 = (b_i^{(2)})^2,$$

d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(2)},$$

car les $b_i^{(j)}$ sont supposés strictement positifs. Ainsi $\Delta_1 = \Delta_2$. Comme $B_1 \Delta_1^{-1} = B_2 \Delta_2^{-1}$, on a ainsi obtenu $B_1 = B_2$. ■

Chapitre 3

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $A \in M_n(\mathbb{K})$ désigne une matrice inversible. Pour un certain vecteur $b \in \mathbb{K}^n$ donné, on cherche $u \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$Au = b.$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à différentes méthodes, dites itératives, permettant de résoudre ce système linéaire. Autrement dit, on cherche à construire une suite de vecteurs $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers u .

3.1 Généralités

Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $(I - B)$ est inversible et telle que :

$$u = Bu + c$$

pour un certain vecteur $c \in \mathbb{K}^n$. On définit une méthode itérative par la donnée d'un vecteur initial $u_0 \in \mathbb{K}^n$ et par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = Bu_k + c.$$

Définition 32. On dit qu'une méthode itérative converge si :

$$\forall u_0 \in \mathbb{K}^n, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = u.$$

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une méthode itérative définie par une matrice B et sera utilisé dans toute la suite.

Théorème 33. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la méthode itérative converge ;
2. $\rho(B) < 1$;
3. il existe $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que $\|B\| < 1$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note l'erreur :

$$e_k := u_k - u,$$

d'où l'on déduit :

$$e_{k+1} = Be_k.$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e_k = B^k e_0.$$

Il suffit alors d'appliquer le Théorème 12. ■

3.2 Décomposition de la matrice

Soient $M \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et $N \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = M - N$. Alors :

$$\begin{aligned} Au = b &\iff (M - N)u = b \\ &\iff Mu = Nu + b \\ &\iff u = M^{-1}Nu + M^{-1}b, \end{aligned}$$

ce qui permet de définir une méthode itérative de matrice $B := M^{-1}N$.

Remarque 34. Comme $B = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I - M^{-1}A$, on en déduit que la matrice $I - B = M^{-1}A$ est automatiquement inversible.

Toute décomposition de la matrice A sous la forme $M - N$ avec M inversible permet donc de définir une méthode itérative. Bien entendu, cela ne garantit en rien sa convergence. Le résultat suivant donne une condition suffisante pour cela.

Théorème 35. Supposons que A soit hermitienne définie positive. Si la matrice (hermitienne) $M^* + N$ est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

et, en particulier, la méthode converge.

Démonstration. Commençons par vérifier que la matrice $M^* + N$ est bien hermitienne. En effet :

$$\begin{aligned}
 (M^* + N)^* &= M + N^* \\
 &= A + N + N^* \\
 &= A^* + N + N^* && \text{car } A = A^* \\
 &= (A + N)^* + N \\
 &= M^* + N.
 \end{aligned}$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée définie par la matrice $A : \|\cdot\|^2 = (\cdot)^* A \cdot$. Alors :

$$\|M^{-1}N\| = \|M^{-1}(M - A)\| = \|I - M^{-1}A\| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\|=1}} \|v - M^{-1}Av\|.$$

Soit alors $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|v\| = 1$. On note $w := M^{-1}Av$. Alors :

$$\|v - w\|^2 = (v - w)^* A (v - w) = v^* Av - v^* Aw - w^* Av + w^* Aw.$$

Or, $v^* Av = \|v\|^2 = 1$. De plus, $w = M^{-1}Av$, donc $Av = Mw$. On déduit également de la définition de w que $v = A^{-1}Mw$, donc $v^* = w^* M^* (A^{-1})^* = w^* M^* A^{-1}$ car $A = A^*$. Ainsi :

$$\|v - w\|^2 = 1 - w^* M^* w - w^* Mw + w^* Aw = 1 - w^* (M^* + M - A)w = 1 - w^* (M^* + N)w.$$

Comme $v \neq 0$, en particulier $w \neq 0$ et ainsi $w^* (M^* + N)w > 0$ car la matrice $M^* + N$ est supposée définie positive. Autrement dit :

$$\forall v \in \mathbb{K}^n, \quad \|v\| = 1 \implies \|v - M^{-1}Av\| < 1.$$

L'application $v \mapsto \|v - M^{-1}Av\|$ est continue sur le compact $\{v \in \mathbb{K}^n ; \|v\| = 1\}$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, on obtient $\|M^{-1}N\| < 1$ et le résultat s'ensuit car $\rho(M^{-1}N) \leq \|M^{-1}N\|$. ■

3.3 Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel

À partir de maintenant, on suppose que tous les éléments diagonaux de A sont non nuls :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_{ii} \neq 0.$$

On définit les matrices D , E et F (dans $M_n(\mathbb{K})$) par :

$$D_{ij} = \begin{cases} A_{ii}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad E_{ij} = \begin{cases} -A_{ij}, & \text{si } i > j, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad F_{ij} = \begin{cases} -A_{ij}, & \text{si } i < j, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Autrement dit :

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse sur les éléments diagonaux de A , la matrice D est inversible. La méthode de Jacobi consiste à choisir $M := D$ et $N := E + F$. Dans la suite, on notera :

$$J := M^{-1}N = D^{-1}(E + F)$$

la matrice de Jacobi. À partir de la décomposition $A = D - E - F$, on peut faire d'autres choix. Ainsi, en fixant $M := D - E$ et $N := F$, on obtient la méthode de Gauss-Seidel, de matrice associée :

$$R_1 := M^{-1}N = (D - E)^{-1}F.$$

On s'intéressera à la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel un peu plus tard. On peut d'ores-et-déjà citer un résultat reliant les matrices associées à ces deux méthodes. Pour cela, nous aurons besoin du lemme technique qui suit.

Lemme 36. Pour $\mu \in \mathbb{K}^*$, on définit la matrice :

$$A(\mu) := \begin{pmatrix} b_1 & \mu^{-1}c_1 & & \\ \mu a_2 & b_2 & \mu^{-1}c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu a_{n-1} & b_{n-1} & \mu^{-1}c_{n-1} \\ & & & \mu a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\forall \mu \in \mathbb{K}^*, \quad \det(A(\mu)) = \det(A(1)).$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$. On pose :

$$Q(\mu) := \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & \mu^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu^n \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul permet de montrer :

$$A(\mu) = Q(\mu)A(1)Q(\mu)^{-1}.$$

Ainsi :

$$\det(A(\mu)) = \det(Q(\mu)) \det(A(1)) \det(Q(\mu)^{-1}),$$

et le résultat s'ensuit car $\det(Q(\mu)^{-1}) = \det(Q(\mu))^{-1}$. ■

Théorème 37. Supposons que A soit tridiagonale. Alors :

$$\rho(R_1) = \rho(J)^2.$$

Démonstration. Rappelons les expressions des matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel :

$$J = D^{-1}(E + F) \quad \text{et} \quad R_1 = (D - E)^{-1}F.$$

Les valeurs propres de J sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$\lambda \mapsto \det(J - \lambda I).$$

On rappelle que les éléments diagonaux de A sont supposés non nuls. En particulier, $\det(-D) \neq 0$. Ainsi :

$$\det(J - \lambda I) = 0 \iff \det(-D) \det(J - \lambda I) = 0.$$

Les valeurs propres de J sont donc également les racines du polynôme :

$$p_J: \lambda \mapsto \det(-D) \det(J - \lambda I) = \det(-D(J - \lambda I)) = \det(\lambda D - (E + F)).$$

De la même façon, $\det(E - D) \neq 0$, donc les valeurs propres de R_1 sont les racines du polynôme :

$$p_{R_1}: \lambda \mapsto \det(\lambda D - \lambda E - F).$$

Intéressons-nous aux valeurs propres λ non nulles. Pour commencer :

$$p_{R_1}(\lambda^2) = \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F).$$

La matrice A étant tridiagonale, on peut par exemple écrire :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & -f_1 & & & \\ -e_2 & d_2 & -f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -e_{n-1} & d_{n-1} & -f_{n-1} \\ & & & -e_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda^2 D - \lambda^2 E - F &= \begin{pmatrix} \lambda^2 d_1 & -f_1 & & & \\ -\lambda^2 e_2 & \lambda^2 d_2 & -f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda^2 e_{n-1} & \lambda^2 d_{n-1} & -f_{n-1} \\ & & & -\lambda^2 e_n & \lambda^2 d_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \lambda d_1 & -\lambda^{-1} f_1 & & & \\ -\lambda e_2 & \lambda d_2 & -\lambda^{-1} f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda e_{n-1} & \lambda d_{n-1} & -\lambda^{-1} f_{n-1} \\ & & & -\lambda e_n & \lambda d_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$p_{R_1}(\lambda^2) = \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F) = \lambda^n \det(\lambda D - \lambda E - \lambda^{-1} F).$$

On applique le lemme technique :

$$\det(\lambda D - \lambda E - \lambda^{-1} F) = \det(\lambda D - E - F).$$

On a donc obtenu :

$$p_{R_1}(\lambda^2) = \lambda^n p_J(\lambda).$$

En utilisant cette relation, on montre facilement que :

$$\lambda \in \text{Sp}(J) \setminus \{0\} \implies \lambda^2 \in \text{Sp}(R_1) \setminus \{0\}.$$

Et réciproquement :

$$\lambda \in \text{Sp}(R_1) \setminus \{0\} \implies \pm \ell \in \text{Sp}(J) \setminus \{0\}$$

où $\ell \in \mathbb{C}$ désigne une racine carrée de λ . ■

Remarque 38. En particulier, ce résultat implique que, au moins dans les cas des matrices tridiagonales, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent (ou divergent) simultanément.

Théorème 39. Supposons que A soit tridiagonale symétrique définie positive. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

Démonstration. Rappelons les matrices utilisées pour la méthode de Gauss-Seidel :

$$M = D - E \quad \text{et} \quad N = F.$$

Ainsi :

$$M^T + N = D - E^T + F.$$

Or, A est symétrique, donc $E^T = F$ et ainsi $M^T + N = D$. Comme A est définie positive, D également, donc $M^T + N$ est symétrique définie positive : on en déduit que la méthode de Gauss-Seidel converge. Comme A est de plus tridiagonale, on en déduit que la méthode de Jacobi converge également. ■

Annexe A

Quelques petits résultats faciles

On se propose ici de démontrer quelques résultats qui sont souvent utilisés, sans être nécessairement démontrés car suffisamment naturels. Aussi, faisons-le une bonne fois pour toutes !

Proposition 40. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (respectivement supérieures), alors $C := AB$ est également triangulaire inférieure (respectivement supérieure) et ses éléments diagonaux sont les produits des éléments diagonaux de A et B .

Démonstration. Considérons le cas où A et B sont triangulaires inférieures (le cas de matrices triangulaires supérieures se traite exactement de la même manière), c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (j > i \implies A_{ij} = B_{ij} = 0).$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^i A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=i+1}^n A_{ik} B_{kj}.$$

Pour tout $k \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, $k > i$, donc $A_{ik} = 0$, ce qui implique :

$$\sum_{k=i+1}^n A_{ik} B_{kj} = 0.$$

Supposons que $j > i$. Pour tout $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$, on a donc $j > k$, ce qui implique $B_{kj} = 0$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^i A_{ik} B_{kj} = 0.$$

On a ainsi $C_{ij} = 0$, ce qui montre bien que C est triangulaire inférieure.

Considérons pour finir $i = j$:

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}B_{ki} + A_{ii}B_{ii}.$$

Or, pour $k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, on a en particulier $k < i$, donc $B_{ki} = 0$, d'où :

$$C_{ii} = A_{ii}B_{ii}.$$

■

Proposition 41. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure (respectivement supérieure) inversible. Alors $B := A^{-1}$ est également triangulaire inférieure (respectivement supérieure) et ses éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de A .

Démonstration. Commençons par remarquer que les éléments diagonaux de A sont bien non nuls. Comme A est triangulaire, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux. Or, A est supposée inversible, donc son déterminant est non nul.

Considérons le cas où A est triangulaire inférieure, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (j > i \implies A_{ij} = 0).$$

On part de l'égalité $I = AA^{-1}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors :

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^i A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=i+1}^n A_{ik}B_{kj}.$$

Pour tout $k \in \llbracket i+1, n \rrbracket$, $k > i$, donc $A_{ik} = 0$, ce qui nous donne :

$$\delta_{ij} = I_{ij} = \sum_{k=1}^i A_{ik}B_{kj}. \tag{A.1}$$

Nous allons montrer par récurrence sur $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que :

$$B_{ii} = \frac{1}{A_{ii}} \quad \text{et} \quad B_{ij} = 0 \text{ si } i < j.$$

On commence par le cas $i = 1$ que l'on considère dans (A.1) :

$$\delta_{1j} = A_{11}B_{1j},$$

d'où :

$$B_{1j} = \frac{\delta_{1j}}{A_{11}} = \begin{cases} \frac{1}{A_{11}}, & \text{si } j = 1, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui montre que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $i = 1$. Supposons qu'elle le soit jusqu'à un certain rang $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On reprend l'égalité (A.1) :

$$\delta_{i+1,j} = \sum_{k=1}^i A_{i+1,k} B_{kj} + A_{i+1,i+1} B_{i+1,j}.$$

Supposons $j \geq i+1$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $B_{kj} = 0$ pour $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Ainsi :

$$B_{i+1,j} = \frac{\delta_{i+1,j}}{A_{i+1,i+1}},$$

ce qui termine la preuve. ■

┌ **Proposition 42.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de A , alors λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} .

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre associé à λ . Par définition, on a :

$$Av = \lambda v.$$

Multiplions simplement par A^{-1} à gauche :

$$v = A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v,$$

d'où

$$A^{-1}v = \lambda^{-1}v$$

et ainsi λ^{-1} est bien valeur propre de A^{-1} . ■

┌ **Proposition 43.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice normale (c'est-à-dire $A^*A = AA^*$). Alors les valeurs propres de A et de A^* sont conjuguées.

Démonstration. Soit λ une valeur propre de A , et soit $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors :

$$Av = \lambda v,$$

ce qui implique :

$$(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)v = 0.$$

Or, comme A est normale, ces deux matrices commutent :

$$(A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I).$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= ((A^* - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)v, v) = ((A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda}I)v, v) \\ &= ((A^* - \bar{\lambda}I)v, (A^* - \bar{\lambda}I)v) \\ &= \|(A^* - \bar{\lambda}I)v\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(A^* - \bar{\lambda}I)v = 0,$$

donc $\bar{\lambda}$ est valeur propre de A^* . ■

— **Corollaire 44.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ normale. Alors les valeurs propres de A^*A sont réelles positives et sont données par les carrés des modules des valeurs propres de A .

Démonstration. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et soit $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors :

$$(A^*A)v = A^*(Av) = A^*(\lambda v) = \lambda(A^*v) = \lambda\bar{\lambda}v = |\lambda|^2v,$$

ce qui est bien le résultat recherché. ■

Références

- [Cia82] Philippe G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1982.
- [Ser01] Denis SERRE. *Les matrices, théorie et pratique*. Dunod, 2001.